Research Paper Series

No. 6

金利のレジーム遷移を考慮したコア預金モデル
- コア預金のマチュリティー・ラダーの構築 -

室町 幸雄 †

2019 年 2 月

† 首都大学東京大学院経営学研究科

金利のレジーム遷移を考慮したコア預金モデル
– コア預金のマチュリティー・ラダーの構築 –

首都大学東京 大学院 経営学研究科　　室町 幸雄

2019 年 2 月 26 日

概 要

最近の超低金利環境下で金融機関では資産のデュレーションが長期化し，金利リスクの増大が懸念されている．一方，負債側では満期の定めのない流動性預金が高い比率を占めているが，そのうちのかなりの量は引き出されることなく長期間預金として滞留し，資産側の金利リスクの一部を相殺すると考えられている．しかし，その滞留期間特性は不明確で，現状では金利リスクの相殺効果はリスク管理上重要と考えられているものの，適切に評価できているとは言い難い．そこで本稿では，流動性預金の滞留期間を算出し，金利リスクを計測するための新しいモデルを提案する．流動性預金の残高変化は金利に関連して変動すると考えて，マルコフ連鎖によりレジーム遷移する確率金利モデルをもとに，モンテカルロシミュレーションを用いて流動性預金残高の時間変化を算出し，預金の滞留時間分布を求め，金利リスクを評価する．このモデルでは，金利デリバティブの価格付け手法を使うことで将来時点の金利期間構造の変化を明示的に扱えるので，預金残高を任意の期間の金利と関連付けてモデリングすることができる．また，金利リスクのストレステストを流動性預金に適用することも可能になる．数値例からは，既存の確率金利を用いた評価モデルは急激な金利上昇を仮定しないとコア預金のリスク計測モデルとして機能しにくいが，提案モデルは無理のない設定のもとでリスク計測モデルとして十分に機能しうることがわかった．

1 はじめに

金融機関は多くの流動性預金を負債として保有し，企業や個人への融資や有価証券への投資，プロジェクトへの投資などを行っているが，近年では国債投資や住宅ローン貸付の増大により資産側のデュレーションが長期化し，金利リスクの増大が懸念されている．一方，負債側では流動性預金額が増加傾向にあるが，それが資産側の金利リスクをどの程度相殺できるのかあまり理解されていない．このような流動性預金に関する問題は国際的な業務を行う金融機関に対するバーゼル規制でも重要視されており，銀行勘定の金利リスク（IRRBB，Interest Rate Risk in the Banking Book）の重要課題の一つとして取り上げられている [1, 19].

期限に定めがない預金は，いつでも引出可能であると考えれば滞留時間はほぼゼロとみなせるが，実際にはある程度の量は引き出されることなく長期間預金されたままになっている．この引き出されることなく長期間滞留する預金はコア預金と呼ばれるが，滞留期間の特性はあまり理解されておらず，現時点でデファクト・スタンダードとなる数理モデルも確立されていない．

流動性預金の金利リスク評価モデルはコア預金モデルと呼ばれており，現時点までにバーゼルの標準的手法以外にもいくつものコア預金モデルが提案されてきた．データフォアビジョン [21]，日興リサーチセンター [24]，室町 [28] を参考にまとめると，それらは (1) 過去の残高データから将来の残高を直接推定する直接推定型，(2) 金利などの説明変数と残高（被説明変数）の関係性を用いて，説明変数の将来予測から間接的に推定する間接推定型に大別され，それぞれにさまざまなモデルが存在する．例えば，(1) の直接推定型にはヒストリカル法，残高比（残高の増加率）が混合正規分布に従うとする混合正規分布モデル [22]，残高比のレジーム遷移を考慮する AA-Kijima モデル [14] などがある．(2) の間接推定型には金利参照型モデル，金利・景気参照型モデル，コピュラを用いたモデルなどがあり，金利参照型モデルには固定性預金と流動性預金の残高比と金利の関係を考慮する固定性預金残高比変動モデルとその改良モデル [16, 15, 26, 25]，残高比が自己回帰モデルに従うとする固定性預金残高比自己回帰モデル [28]，Hull-White の確率金利モデルを用いた DFV（データフォアビジョン）モデル [21]，預金金利と市場金利の差や長短金利差との時系列的な関係を考慮する野村モデルなどがあり，金利・景気参照型モデルには CPC モデル [17] がある．他にも，預金の流出入をモデル化する預金流出入モデル [27]，預け入れられた時点からの預金額の流出を預金額の死亡とみなして生存解析の手法を適用する預金寿命モデル [12] があり，さらに，もともとは流動性預金の現在価値を評価するために提案された JvD モデル [7]，O'Brien モデル [10]，OTS モデル [11] なども広い意味でコア預金モデルの一種とみなされることもある．

この中で現在の邦銀において最も標準的なのは AA-Kijima モデルであるが，金利のような残高変化に関連すると考えられる変数との関係性が考慮されていないため，2010 年以降は金利モデルを前提とした新たな評価モデルが提案されるようになってきた．このような動きは，流動性預金のリスクを単体で評価するのではなく，他の資産・負債とあわせて金融機関のポートフォリオ全体を評価する統合リスク評価へと繋がると考えられるので，非常に望ましい．しかしながら既存のモデルでは，過去のデータに基づいてパラメータを設定をすると流動性預金残高は上昇の一途を辿ることになってしまうため，リスク評価としてはまともに機能しない．そのため，明日から突然金利が急上昇するといった無理なトレンドを持つようにパラメータを設定しなければならず，その結果として将来の期待残高は突然減少に転じることにならざるを得ないが，そのような変化は現時点において決してもっともらしいものではない．

本稿では，このような矛盾を解消できる新たな流動性預金残高推定モデルを提案する．他の金利参照型モデルと同様に，流動性預金残高は金利の動向に影響されると考えて，モデルの基礎には確率金

利モデルを使用するが，AA-Kijima モデルの特徴であるレジーム遷移過程を取り入れることで，現在のマイナス金利環境の継続性を考慮しつつ，今以上の金利低下を避けながらも将来の金利上昇を自然に織り込める，より現実的なモデルを構築する．また，デリバティブの価格付け理論を適用することで将来の金利期間構造全体の変動を扱えるようにすることで，預金残高変化は任意の期間の金利と関連付けてモデル化できることになる．具体的な計算にはモンテカルロシミュレーションを使用するので，例えば参照変数の採択に時間差（タイムラグ）を考慮することもできるようになるため[1]，モデルの柔軟性も向上する．さらに，外部から与えられた金利シナリオを反映したストレステストも適用可能になるので，他の資産・負債の金利ストレステスト結果との合算評価も可能であり，従来よりも統合的に資産・負債の金利リスクを議論できるようになる．

預金残高の変動を金利のレジーム遷移過程を用いたモデルで表現することには違和感があるかもしれない．実際に，現在は預金残高と金利の関係がまったく見られない，という実務家の指摘もある．しかしこの指摘を「超低金利・マイナス金利環境下では預金残高と金利の関係が消失する」と言い換えれば，それこそ本稿のモデルをサポートする有力な観測事実である．なぜならば，このモデルでは預金残高と金利の関係は金利のレジームによって変わると考えるのが自然だからである．

本稿の構成は以下である．2 節では提案モデルの前提となる知識を整理し，3 節で提案モデルの詳細を説明して，4 節ではモデルパラメータのカリブレーションについて述べる．5 節では簡単な数値例で提案モデルの特性を示し，6 節では最近の観測データから推定したモデルパラメータによる結果を示して，7 節でまとめる．

2　モデルの基礎

本節では，本稿で提案するモデルで用いる理論の基礎を説明する．

2.1　Hull-White モデル（拡張 Vasicek モデル）

時刻 $t, t \geq 0$ における瞬間的なスポットレート（短期金利とも呼ばれる）を $r(t)$ とする．将来のスポットレート $r(t)$ が観測確率 P のもとで

$$\mathrm{d}r(t) = a(m - r(t))\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}z(t), \qquad t \geq 0 \tag{2.1}$$

リスク中立確率 $\widetilde{P}$ のもとで

$$\mathrm{d}r(t) = (\phi(t) - ar(t))\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}\widetilde{z}(t), \qquad t \geq 0 \tag{2.2}$$

[1] 武田 [20] は，個人の預金残高前年比は金利に対して 12ヶ月のタイムラグで相関係数や回帰係数の絶対値が最大になることを示した．一方，公金や企業の預金残高前年比ではタイムラグをとるほど低下する．

に従うと仮定する．ただし，a, σ は正定数，m は定数，$\phi(t)$ は時刻 t の確定的な関数，$z(t)$ と $\widetilde{z}(t)$ はそれぞれ P と $\widetilde{P}$ のもとにおける標準ブラウン運動とする．(2.1) は Vasicek モデル，(2.2) は Hull-White モデルの一種である．また，

$$\lambda(t) \equiv \frac{am - \phi(t)}{\sigma} \tag{2.3}$$

はリスクの市場価格と呼ばれ，$\lambda(t)$ があるテクニカルな条件（例えば Novikov 条件）を満たすとき，確率測度 P から $\widetilde{P}$ への測度変換は，十分に大きな $T > 0$ をとり，確率過程

$$Z(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}z(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda^2(s)\mathrm{d}s\right\}, \qquad 0 \le t \le T \tag{2.4}$$

を用いて，事象 $A \in \mathcal{F}_T$ に対して

$$\widetilde{P}\{A\} = E\left[1_A Z(T)\right] \tag{2.5}$$

で与えられることがギルサノフの定理により保証される．ここで，1_A は事象 A が真ならば 1，偽ならば 0 になる定義関数である．

時刻 t における値 $r(t)$ が既知のとき，(2.1) より，観測確率 P のもとで

$$r(s) = m + (r(t) - m)\mathrm{e}^{-a(s-t)} + \sigma\int_t^s \mathrm{e}^{-a(s-u)}\mathrm{d}z(u), \qquad 0 \le t \le s, \tag{2.6}$$

となるので，

$$E_t[r(s)] = m + (r(t) - m)\mathrm{e}^{-a(s-t)}, \tag{2.7}$$

$$V_t[r(s)] = \sigma^2 B(2a, t, s) = \sigma^2 B(2a, 0, s-t) \tag{2.8}$$

$$B(a, t, T) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-a(T-t)}}{a} \tag{2.9}$$

となる．ここで，$E_t[\cdot]$ は観測確率 P のもとにおける条件付期待値演算子，$V_t[\cdot]$ は観測確率 P のもとにおける条件付分散演算子である．同様に，(2.2) より，リスク中立確率 $\widetilde{P}$ のもとで

$$r(s) = r(t)\mathrm{e}^{-a(s-t)} + \int_t^s \phi(u)\mathrm{e}^{-a(s-u)}\mathrm{d}u + \sigma\int_t^s \mathrm{e}^{-a(s-u)}\mathrm{d}\widetilde{z}(u), \qquad 0 \le t \le s \le T, \tag{2.10}$$

となるので，

$$\widetilde{E}_t[r(s)] = r(t)\mathrm{e}^{-a(s-t)} + \int_t^s \phi(u)\mathrm{e}^{-a(s-u)}\mathrm{d}u, \tag{2.11}$$

$$\widetilde{V}_t[r(s)] = V_t[r(s)] = \sigma^2 B(2a, t, s) \tag{2.12}$$

となる．ここで，$\widetilde{E}_t[\cdot]$ はリスク中立確率 $\widetilde{P}$ のもとにおける条件付期待値演算子，$\widetilde{V}_t[\cdot]$ はリスク中立確率 $\widetilde{P}$ のもとにおける条件付分散演算子である．

また，満期 T の割引債の時刻 t における価格は

$$P(t,T;r(t)) = A(a,t,T)\exp\{-B(a,t,T)r(t)\} \tag{2.13}$$

$$\log \hat{A}(a,t,T) = \frac{\sigma^2}{2a^2}\left[T-t-2B(a,t,T)+B(2a,t,T)\right] - \int_t^T \phi(u)B(a,u,T)\mathrm{d}u \tag{2.14}$$

で与えられ，(2.13) より，時刻 t における満期 T のゼロレート（割引債の最終利回り）は，

$$R(t,T) = -\frac{\log P(t,T;r(t))}{T-t} = \frac{B(a,t,T)}{T-t}r(t) - \frac{\log \hat{A}(a,t,T)}{T-t} \tag{2.15}$$

と表現できる．

2.2 マルコフ局面転換モデル（Markovian Regime-Switching Model）

時刻を t, $t \geq 0$ で表し，現在を $t=0$ として，観測確率 P のもとで連続時間，有限状態のマルコフ連鎖モデルを考える．複数の K 個の状態（局面，レジームとも呼ばれる）$k=1,\cdots,K$ があるものとして，時刻 t における状態をマルコフ連鎖 $\boldsymbol{X}(t)$ で表現する．$\boldsymbol{X}(t) \in \{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_K\}$ は K 次元ベクトルで，ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ の第 i 成分は $(\boldsymbol{e}_j)_i = \delta_{ij}$（$\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタ），つまり，第 j 成分のみ 1 でその他の成分は 0 の単位ベクトルである．Elliotte [2] や Elliotte et al. [3] によると，レジーム推移の generator は定常的であると仮定して

$$\mathcal{Q} = (q_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,K}, \qquad q_{ij} = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{P\{X(t+\Delta t)=j|X(t)=i\}}{\Delta t}, & j \neq i \\ -\sum\limits_{k \neq i} q_{ik}, & j = i \end{cases} \tag{2.16}$$

とすると，K 次元ベクトル $\boldsymbol{M}(t)$ を P–マルチンゲールとして，

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}(0) + \int_0^t \mathcal{Q}\boldsymbol{X}(s)\mathrm{d}s + \boldsymbol{M}(t), \qquad t \geq 0 \tag{2.17}$$

と表現できる．

リスク中立確率 $\widetilde{P}$ のもとにおける generator も定常的であると仮定して，(2.16) と同様に $\widetilde{\mathcal{Q}} = (\widetilde{q}_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,K}$ を定義すると，こちらも K 次元ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{M}}(t)$ を $\widetilde{P}$–マルチンゲールとして，

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}(0) + \int_0^t \widetilde{\mathcal{Q}}\boldsymbol{X}(s)\mathrm{d}s + \widetilde{\boldsymbol{M}}(t), \qquad t \geq 0 \tag{2.18}$$

と表現できる．

なお，マルコフ局面転換性を持つ金融市場モデルは一般に非完備であり，リスク中立確率は無数に存在しうる．この問題に関しては，Elliotte et al. [4, 6] による regime switching random Esscher transform を用いた P と同値なマルチンゲール測度を $\widetilde{P}$ とすることで対応し，本稿では詳述しない．また，P から $\widetilde{P}$ への測度変換では確率過程 $X(t)$ に対するリスクの市場価格を考慮する必要があり，$\mathcal{Q}$ と $\widetilde{\mathcal{Q}}$ の関係にもそれらが反映されるが，本稿では $\mathcal{Q}$ と $\widetilde{\mathcal{Q}}$ をそれぞれ扱うことで対応し，$X(t)$ に対するリスクの市場価格は明示的に扱わない．

3 モデル

本節では新しいコア預金モデルを提案する．3.1 節でモデルの全体像を，3.2 節で核となる確率金利モデルについて説明し，3.3 節で金利期間構造の算出について説明する．ここで使う確率金利モデルは前節で説明したモデルを統合したマルコフ局面転換拡張バシチェックモデル（Markovian Regime-Switching Extended Vasicek Model）である．3.4 節ではシミュレーション手法について説明し，3.5 節で預金残高と金利の関係のモデル化について簡単に触れる．

3.1 モデルの全体構成

提案モデルでは，将来の流動性預金残高の確率分布を時系列的に作成するためにモンテカルロ・シミュレーションを使用する．実際のところ，さまざまな銀行のさまざまな種類の預金残高が金利だけに依存して決まるとは考えられないが，ここでは金利だけに依存するものとして全体像を記述する．もちろん，他の変数，例えば株価インデックスや CPI，あるいは地域人口などに依存することがデータ分析の結果として得られれば，それらの変数とその将来変動モデルもモンテカルロ・シミュレーションの中に組み込めばよい．

提案モデルにおける流動性預金残高の評価を行う手順は以下である．

<u>流動性預金残高の評価手順</u>

1. 確率金利モデルをもとに，評価終了時点 T までの将来のシナリオ（ここでは金利のシナリオのみを想定）を乱数を使って発生させる．乱数から直接生成するのはスポットレート（短期金利）だけであるが，金利デリバティブの価格付け理論を用いることで，各時点の短期金利の値をもとに各時点における金利期間構造を生成できる．以下ではこれを金利期間構造シナリオと呼ぶ．

2. 流動性預金の種類ごとに，評価時点 $t_1, t_2, \cdots, t_n = T$ までの金利期間構造シナリオに基づいて，残高と金利との関係性を考慮しながら預金残高の推移を計算する．

3. 評価時点 $t_1, t_2, \cdots, t_n = T$ の各時点ごとに全ての流動性預金残高の総和を求める．これが流動性預金の総残高のサンプルパスになる．

4. サンプルパスが十分な数に達するまで，1-3 の作業を繰り返す．

5. 評価時点 $t_1, t_2, \cdots, t_n = T$ の各時点で総残高の分布を作成し，コア預金について議論する．通常行われる議論は以下である．

   (a) 時点 t_i, $i = 1, \cdots, n$ における総残高の分布から，Volume at Risk $\mathrm{VaR}_\alpha(t_i)$ を算出する．$\mathrm{VaR}_\alpha(t_i)$ としては，適当な信頼水準 α（$\alpha = 0.99$ (99%) がよく使われる）を設定し，総残高の $100(1-\alpha)$ パーセント点を求め，それを各時点の $\mathrm{VaR}_\alpha(t_i)$ とする．

(b) 通常，時点が進むにつれて $\mathrm{VaR}_\alpha(t)$ は低減していくので，その差額 $\mathrm{VaR}_\alpha(t_i)-\mathrm{VaR}_\alpha(t_{i+1})$ を滞留期間 t_i のコア預金額とし，差額が負になるときはゼロとする．すなわち，滞留期間 t_i のコア預金額を $\max(\mathrm{VaR}_\alpha(t_i)-\mathrm{VaR}_\alpha(t_{i+1}), 0)$ で与える．ただし，$\mathrm{VaR}_\alpha(0)$ は現時点の総残高とする．

(c) コア預金額の滞留期間の分布（マチュリティー・ラダー）をもとに流動性預金全体のデュレーションなどの金利感応度を算出し，金利リスクを評価する[2].

上記のうち，手順 1 では将来金利を発生するために確率金利モデルが必要であり，手順 2 では預金種類別あるいはコーホート別に預金残高と金利との関係のモデル化が必要である．

3.2 マルコフ局面転換拡張バシチェックモデル（Markovian Regime-Switching Extended Vasicek Model, MRSEV モデル）

時刻 t, $t \geq 0$ における瞬間的なスポットレート $r(t)$ が，観測確率 P のもとで，

$$\mathrm{d}r(t) = a\left(\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{X}(t)\rangle - r(t)\right)\mathrm{d}t + \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{X}(t)\rangle \mathrm{d}z(t), \quad k=1,\cdots,K, \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$

リスク中立確率 $\widetilde{P}$ のもとで，

$$\mathrm{d}r(t) = \left(\langle \boldsymbol{\phi}(t), \boldsymbol{X}(t)\rangle - ar(t)\right)\mathrm{d}t + \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{X}(t)\rangle \mathrm{d}\widetilde{z}(t), \quad k=1,\cdots,K, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.2}$$

に従うものとする．ただし，a と σ_k, $k=1,\cdots,K$ は正定数，$\boldsymbol{m}=(m_1,\cdots,m_K)^\top$，$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\cdots,\sigma_K)^\top$ はそれぞれ K 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{\phi}(t)=(\phi_1(t),\cdots,\phi_K(t))^\top$ は時刻 t の確定関数からなる K 次元ベクトル，$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\rangle$ はベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積，$z(t)$ と $\widetilde{z}(t)$ はそれぞれ P と $\widetilde{P}$ のもとにおける標準ブラウン運動である．$z(t)$ に対するリスクの市場価格 $\lambda(t)$ は

$$\lambda(t) = \frac{\langle a\boldsymbol{m} - \boldsymbol{\phi}(t), \boldsymbol{X}(t)\rangle}{\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{X}(t)\rangle} \tag{3.3}$$

であり，$\boldsymbol{X}(t)$ に依存する確率過程となる．リスクの市場価格は Vasicek モデルでは定数，Hull-White モデルでは時刻 t の確定関数であるが，このモデルでは一般にレジーム $\boldsymbol{X}(t)$ に依存する確率過程になる．以下ではこのモデルをマルコフ局面転換拡張バシチェックモデル（Markovian Regime-Switching Extended Vasicek Model）と呼び，MRSEV モデルと略称する．

(3.3) の $\lambda(t)$ は一般に $\boldsymbol{X}(t)$ に依存する確率過程であるが，モデルパラメータの推定を容易にするために，以下を仮定する．

仮定 3.1. (3.3) で与えられるリスクの市場価格 $\lambda(t)$ は時刻 t の確定関数である．

[2] この段階では預金利率の市場金利への追随率なども算出して金利リスクを評価するが，本稿では立ち入らない．

仮定 3.1 より，確率測度による平均回帰水準の差 $\langle \boldsymbol{m} - \frac{1}{a}\boldsymbol{\phi}(t), \boldsymbol{X}(t)\rangle$ は時刻 t とレジーム $\boldsymbol{X}(t)$ に依存し，$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{e}_k$ のとき，

$$\phi_k(t) = am_k - \sigma_k\lambda(t) \tag{3.4}$$

となる．このため確率金利モデルは，観測確率 P のもとでは Vasicek モデル，リスク中立確率 $\widetilde{P}$ のもとでは拡張 Vasicek モデル（Hull-White モデル）となるので，このモデルで現在時点における金利期間構造を再現することができる．

3.3　MRSEV モデルにおける割引債価格

Elliotte and Siu [5] と同様の議論より，時刻 t における満期 T の割引債価格は，$r(t) = r,\ \boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}$ として

$$\begin{aligned} P(t,T,r,\boldsymbol{X}) &= \widetilde{E}\left[\exp\left\{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u\right\}\middle| r(t) = r,\ \boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}\right] \\ &= \exp\left\{A(t,T,\boldsymbol{X}) - B(t,T)r\right\}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$B(t,T) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-a(T-t)}}{a}, \tag{3.6}$$

のように表現され，$\boldsymbol{A}(t,T,\boldsymbol{X}) = (A_1,\ A_2, \cdots, A_K)^\top$，$A_i(t,T) = A(t,T,\boldsymbol{e}_i)$ は，境界条件

$$A_i(T,T) = 0, \quad i = 1, \cdots, K \tag{3.7}$$

のもとにおける連立常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}A_i(t,T)}{\mathrm{d}t} - \phi_i(t)B(t,T) + \frac{1}{2}\sigma_i^2 B^2(t,T) + \mathrm{e}^{-A_i(t,T)}\langle \boldsymbol{K}, \widetilde{\mathcal{Q}}\boldsymbol{e}_i\rangle = 0, \quad i = 1, \cdots, K \tag{3.8}$$

を満たす．ただし，$\boldsymbol{K} = (K_1,\ K_2,\ \cdots, K_K)^\top$，$K_i = K(t,T,\boldsymbol{e}_i) = \exp\{A(t,T,\boldsymbol{e}_i)\} = \mathrm{e}^{A_i(t,T)}$ である．(3.8) は，

$$\mathrm{e}^{A_i(t,T)}\frac{\mathrm{d}A_i(t,T)}{\mathrm{d}t} + \left\{\frac{1}{2}\sigma_i^2 B^2(t,T) - \phi_i(t)B(t,T)\right\}\mathrm{e}^{A_i(t,T)} + \langle \boldsymbol{K}, \widetilde{\mathcal{Q}}\boldsymbol{e}_i\rangle = 0 \tag{3.9}$$

と変形できるので，$\bar{A}_i(t,T) = \exp(A_i(t,T))$ は

$$\frac{\mathrm{d}\bar{A}_i(t,T)}{\mathrm{d}t} + \left\{\frac{1}{2}\sigma_i^2 B^2(t,T) - \phi_i(t)B(t,T)\right\}\bar{A}_i(t,T) + \sum_{j=1}^K \bar{A}_j(t,T)\widetilde{q}_{ji} = 0, \quad i = 1, \cdots, K \tag{3.10}$$

の解でもある．(3.10) の境界条件は，(3.7) より，

$$\bar{A}_i(T,T) = 1, \qquad i = 1, \cdots, K \tag{3.11}$$

となる．

以上より，連立常微分方程式系 (3.10) を境界条件 (3.11) のもとで解けば，(3.5)–(3.6) より割引債価格が得られることになる．しかし実際には，満期 T における終端条件 (3.11) を初期条件（時刻に関する境界条件）として時刻 t に関してバックワードに現在時点 $t=0$ まで計算することになり，その場合はコルモゴロフの前向き方程式 (3.10) ではなく，コルモゴロフの後向き方程式

$$\frac{\mathrm{d}\bar{A}_i(t,T)}{\mathrm{d}t} + \left\{\frac{1}{2}\sigma_i^2 B^2(t,T) - \phi_i(t)B(t,T)\right\}\bar{A}_i(t,T) + \sum_{j=1}^{K}\widetilde{q}_{ij}\bar{A}_j(t,T) = 0, \quad i=1,\cdots,K \tag{3.12}$$

を解くことになる．(3.11) を境界条件とする連立常微分方程式系 (3.12) は Runge-Kutta 法などで数値的に解くことができて，時刻 t における満期 T のゼロレートは，

$$R(t,T,r(t),\boldsymbol{X}(t)) = -\frac{\log P(t,T,r(t),\boldsymbol{X}(t))}{T-t} \tag{3.13}$$

で与えられる．

3.4 MRSEV モデルのシミュレーション

MRSEV モデルの中核となる確率過程は $(\boldsymbol{X}(t), r(t))$ であり，これらの情報をもとに時刻 t における金利期間構造が常微分方程式を解くことで求められる．

現在時点 $t=0$ におけるレジームと短期金利の値 $(\boldsymbol{X}(0), r(0))$ を既知，数値計算のタイムステップを十分に小さな $\Delta t > 0$，評価期間終了時刻を T, $T>0$ として，以下の手順で観測確率 P のもとにおけるレジームと短期金利のモンテカルロ・シミュレーションを行う．

<u>レジームと短期金利のモンテカルロシミュレーションの手順</u>

1. $i=0$ とおく．
2. $\boldsymbol{X}(i\Delta t)$ のゼロでない成分を第 k_i 成分とし，$r(i\Delta t) = r_i$ とする．
3. (3.1) に従い，標準正規乱数を使って短期金利 $r((i+1)\Delta t)$ を生成する．具体的には，レジームを k_i として，(2.7)–(2.9) をもとに $m = m_{k_i}$, $\sigma = \sigma_{k_i}$, $r(t) = r_i$, $s-t=\Delta t$ として算出する．
4. generator $\mathcal{Q}$ と $(0,1)$ 上の一様乱数を使い，$\boldsymbol{X}((i+1)\Delta t)$ を生成する．具体的には，
   (a) $(0,1)$ 上の一様乱数 U を発生する．
   (b) $U \le \exp(q_{k_ik_i}\cdot\Delta t)$ ならば第 k_i 成分を 1，その他の成分を 0 にする．
   (c) $U > \exp(q_{k_ik_i}\cdot\Delta t)$ ならば
   $$\epsilon = \frac{U - \exp(q_{k_ik_i}\cdot\Delta t)}{1-\exp(q_{k_ik_i}\cdot\Delta t)}$$

を計算し，

$$\sum_{k=1,\,k\neq k_i}^{j-1} q_{k_i,k} < \epsilon \sum_{k\neq k_i} q_{k_i,k} \leq \sum_{k=1,\,k\neq k_i}^{j} q_{k_i,k}$$

を満たす第 j 成分を 1 とし，その他の成分を 0 にする．ここで，$q_{k_ik_i} < 0$ である．

5. $(i+1)\Delta t < T$ ならば $i = i+1$ とおき，手順 2 に戻る．$(i+1)\Delta t = T$ ならば手順 6 に進む．

6. シナリオ数が十分に得られたら，終了する．十分でなければ手順 1 に戻る．

手順 4 で遷移強度に応じたレジーム遷移を行っている．流動性預金残高の評価のために将来時刻 t における金利期間構造，例えば，瞬間的な短期金利 $r(t)$ ではなく，時刻 t における期間 τ の金利 $R(t, t+\tau)$（ゼロレートを想定）が必要になる場合は，$(\boldsymbol{X}(t), r(t))$ をもとに 3.3 節の議論を用いて $R(t, t+\tau; r(t), \boldsymbol{X}(t))$ を算出する．具体的には，

$$\bar{A}_i(t+\tau, t+\tau) = 1 \tag{3.14}$$

を境界条件として (3.12) を解き，(3.5) の割引債価格 $P(t, t+\tau, r(t), \boldsymbol{X}(t))$ を求め，

$$R(t, t+\tau; r(t), \boldsymbol{X}(t)) = -\frac{\log P(t, t+\tau, r(t), \boldsymbol{X}(t))}{\tau} \tag{3.15}$$

とすればよい．

本項で示したモンテカルロシミュレーションでは観測確率 P のもとで将来シナリオを生成している．一方，手順の後に記した金利期間構造の算出では，金利を原資産とする割引債の価格付けをしているので，リスク中立確率 $\widetilde{P}$ を用いている．このように，本稿で提案するモデルでは観測確率 P とリスク中立確率 $\widetilde{P}$ の両方が使われているが，将来価値ベースによるリスク評価を行う場合は理論的にこのようになるケースが多い．詳細は Kijima and Muromachi [9] や室町 [29] を参照されたい．

3.5 預金残高のモデル化に関して

実際の分析では，流動性預金を預金種類，利率の種類，一口当たりの規模，預金者属性などをもとに分類し，それぞれの過去データをもとに預金残高の増減率と金利との関係性をモデル化する．

本稿のモデルでは，確率的なスポットレートモデルを用いたことで金利期間構造を扱えるため，預金残高（あるいはその増減率）とさまざまな期間の金利との関係を扱うことができる．また，金利のレジームに応じて預金残高と金利の関係を変えることも可能であり，現在のマイナス金利環境下で残高と金利に関係性がみられないという観測事実も，マイナス金利レジームにおける顕著な特徴として表現できる．さらに，将来の残高推移をモンテカルロシミュレーションで算出するため，預金残高と同時点の金利だけでなく，例えば 1ヶ月前の金利との関係を考えるといったタイムラグを取り入れたモデルを構築することも可能である．

4　カリブレーションの概略

本節では，レジーム数 K を与えたときのモデルパラメータ a，(m_k, σ_k), $k = 1, \cdots, K$，$\mathcal{Q} = (q_{ij})_{i,j=1,\cdots,K}$，$\widetilde{\mathcal{Q}} = (\widetilde{q}_{ij})_{i,j=1,\cdots,K}$，$\lambda(t)$ および初期滞留確率（初期時点においてレジーム k に属する確率）$\rho_k = P\{\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{e}_k\}$, $k = 1, \cdots, K$ の推定の概略を述べる．

4.1　過去の金利データを用いたパラメータ推定

まず，サンプリング間隔 Δt の短期金利（例えば1ヶ月 LIBOR ）の観測データ $r_0, r_1, \cdots, r_T$ をもとに，観測確率 P のもとにおけるモデルパラメータ (m_k, σ_k), $k = 1, \cdots, K$，a，定常的な一期間レジーム遷移確率行列 $\mathcal{P} = (p_{ij})_{i,j=1,\cdots,K}$，

$$p_{ij} \equiv P\{i_{t+\Delta t} = i | i_t = j\}, \quad i, j = 1, \cdots, K, \tag{4.1}$$

および初期滞留確率 $\rho_k = P\{\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{e}_k\}$, $k = 1, \cdots, K$ は EM アルゴリズムを用いて推定できる．さらに，定常的な generator $\mathcal{Q} = (q_{ij})_{i,j=1,\cdots,K}$ を用いると，

$$\mathcal{P} = \exp\{\mathcal{Q}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{Q}^k}{k!} \tag{4.2}$$

と書けるので，金利の過去データから推定された $\hat{\mathcal{P}}$ をもとに，$\hat{p}_{ij} \geq 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \cdots, K$ の制約条件のもとで generator $\hat{\mathcal{Q}}$ を推定できる．

本稿ではモデルの紹介に注力するので，上記で用いる EM アルゴリズムの具体的な手順や数式の導出は省略する．また，EM アルゴリズムに関しては石島 [13]，小西ら [18]，中川 [23] を参照されたい．

4.2　現在時点の金利期間構造を用いたパラメータ推定

4.1 節で推定された観測確率 P の下におけるモデルパラメータと，現時点 $t = 0$ における金利期間構造の観測データをもとに，リスク中立確率 $\widetilde{P}$ の下における generator $\widetilde{\mathcal{Q}}$ と，標準ブラウン運動 $z(t)$ に対するリスクの市場価格 $\lambda(t)$ を推定する．

これらのパラメータは最適化手法を用いて同時推定することが理想的であるが，ここでは簡便的な推定手法として次の二段階推定手法を提案する．簡単のため，現在は初期滞留確率 ρ_k の最も高いレジームにいるものとする．すなわち，$\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{e}_{\hat{k}}$, $\hat{k} = \arg\max_k \rho_k$ とする[3]．

1. 現在の金利期間構造に最もよくフィットするように，generator $\widetilde{\mathcal{Q}}$ を求める．例えば，$\sum_{j=1}^{K} \widetilde{p}_{ij} = 0$, $i = 1, \cdots, K$，$\widetilde{p}_{ij} \geq 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \cdots, K$，および $\lambda(t) = 0$ の制約条件のもとで，現時点

[3] $\boldsymbol{X}(0)$ を分布を用いて表現することもできるが，本稿では扱わない．

における期間 i 年（$i = 1, 2, \cdots, 10$）のゼロレート $R_{obs}(0,i)$ に最もよくあうように $\widetilde{\mathcal{Q}}$ の成分を推定する．具体的には，

$$V \equiv \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{R(0,i;r(0),\boldsymbol{X}(0)) - R_{obs}(0,i)}{R_{obs}(0,i)} \right)^2 \tag{4.3}$$

を最小化する generator $\hat{\widetilde{\mathcal{Q}}}$ を最適化の数値計算パッケージを用いて求める．

2. $i = 1, 2, \cdots, 10$ のそれぞれに対して，$t \in [i-1, i)$ において $\lambda(t) = \lambda_i$（一定）と仮定して，$R(0,i;r(0),\boldsymbol{X}(0)) = R_{obs}(0,i)$，すなわち，モデルにおける理論ゼロレート $R(0,i;r(0),\boldsymbol{X}(0))$ が観測されるゼロレート $R_{obs}(0,i)$ と一致するように，λ_i を i の小さい順に求めていく[4]．

この二段階推定手法を用いれば，モデルから算出される金利期間構造の 1, 2, $\cdots$, 10 年のゼロレートを現在の観測値と一致させることができる．

5　数値例

本節では提案モデルによる簡単な数値例を示す．まず，提案モデルにより生成される金利期間構造の例，次に試験的に行ったカリブレーションの例を示す．続いて，MRSEV モデルによる将来金利のシミュレーションを行い，預金残高の増減率と金利の間に単純な関係式を仮定したときの預金残高の将来分布，およびコア預金の滞留期間の分布（マチュリティー・ラダー）と平均滞留期間の数値例を示す．ここではレジーム遷移の効果を示すため，レジーム遷移を考慮する場合と考慮しない場合を比較する．

流動性預金の金利リスク評価にはさらに預金金利の市場金利への追随率などの議論も必要であるが，本稿では割愛する．また，以下では LIBOR を想定するが，期間構造を持つ金利であれば国債金利などに対しても適用可能であり，将来的には LIBOR の代替となる金利にも適用可能である．

なお，ここで示す数値例の計算では，実際の観測データから推定されたモデルパラメータの値も用いるが，モデルの特性を明確に示すため，一部のパラメータには ad hoc な値を使用する．ほぼすべてのパラメータを最近の観測データから推定したときの結果は 6 節に示す．

5.1　金利期間構造

はじめに金利期間構造の数値例を示す．ここでは超低金利，低金利，中程度の金利の 3 レジーム（$K = 3$）を想定し，表 1 のように各レジームのパラメータを設定する．これらの数値のうち，平均回帰水準 m_k 以外は，2003 年 1 月から 2018 年 2 月の 1ヶ月 LIBOR の月次時系列データから EM ア

[4] LIBOR 市場の金利期間構造を求める際の Bootstrap 法のときのように，期間の短い方から一意的に決まっていく．

ルゴリズムを用いて推定された値である[5]．また，本節でのみ，観測確率 P のもとにおけるレジーム遷移の generator Q を

$$\widetilde{Q} \;=\; \begin{pmatrix} -0.25 & 0.20 & 0.05 \\ 0.15 & -0.25 & 0.10 \\ 0.05 & 0.15 & -0.20 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

で与えるが，これらもレジーム遷移の効果が見られるように ad hoc に設定した値である．推定値（後出の (5.2)）を使用しなかった理由には，一部の成分がゼロになることを嫌ったこともあるが，実際にはゼロ成分が含まれていても問題は生じない．

表 1: 3 つのレジームのモデルパラメータ

regime	a	$m_k\,(\%)$	$\sigma_k\,(\%)$
1 （超低金利）	0.4	-0.05 %	0.02 %
2 （低金利）	0.4	1.1 %	0.09 %
3 （中金利）	0.4	2.7 %	0.54 %

図 1 に初期時点の短期金利が $r(0) = m_1 = -0.05\%$，リスクの市場価格 $\lambda(t) = 0$ としたときの金利期間構造を示す．この図の横軸は期間（年），縦軸はフォワードレート（%）で,「initial k」は初期時点にレジーム k にいたときの金利期間構造,「regime k」は常にレジーム k に留まる（レジーム遷移を考慮しない）ときの金利期間構造で，後者は拡張 Vasicek モデルのパラメータが $(a, \phi_k(t), \sigma_k)$ のときの金利期間構造と同じである．初期時点のレジームが異なると，その後のレジームの確率分布が異なるので，金利期間構造も異なってくる．また,「initial k」の金利期間構造の「regime k」の金利期間構造からの乖離はレジーム遷移の効果を示している．それぞれの「initial k」の金利期間構造は，当初は「regime k」の金利期間構造に沿っているが，期間が長くなるとともにレジーム遷移の効果が累積的に効いてくるため，次第に乖離してカーブは中央付近へと伸びてくる．

参考のため，$r(0) = m_2 = 1.1\%$，$\lambda(t) = 0$ のときの金利期間構造を図 2 に，$r(0) = m_3 = 2.7\%$，$\lambda(t) = 0$ のときの金利期間構造を図 3 に示す．大まかな傾向は図 1 と同様で，初期時点のレジームが k であれば当初は「regime k」の金利期間構造に沿うが，期間が長くなるとともに次第に乖離して中央付近へと伸びてくる．

次に，リスクの市場価格 $\lambda(t)$ の効果を見るために，$r(0) = 1.1\%$ のケースで，$\lambda(t) = 0.5$ としたときの金利期間構造を図 4 に，$\lambda(t) = -0.5$ としたときを図 5 に示す．$\lambda(t) = \lambda$ が定数の場合，(3.4) よ

[5] 6 節に示すように，実際に推定された m_k は近年の長期におよぶ日本の超低金利環境を反映してどれも値が小さく，差も小さいため，提案モデルの特性が現れにくい．そこで本節では，m_k には表 1 に示す ad hoc な値を使用している．

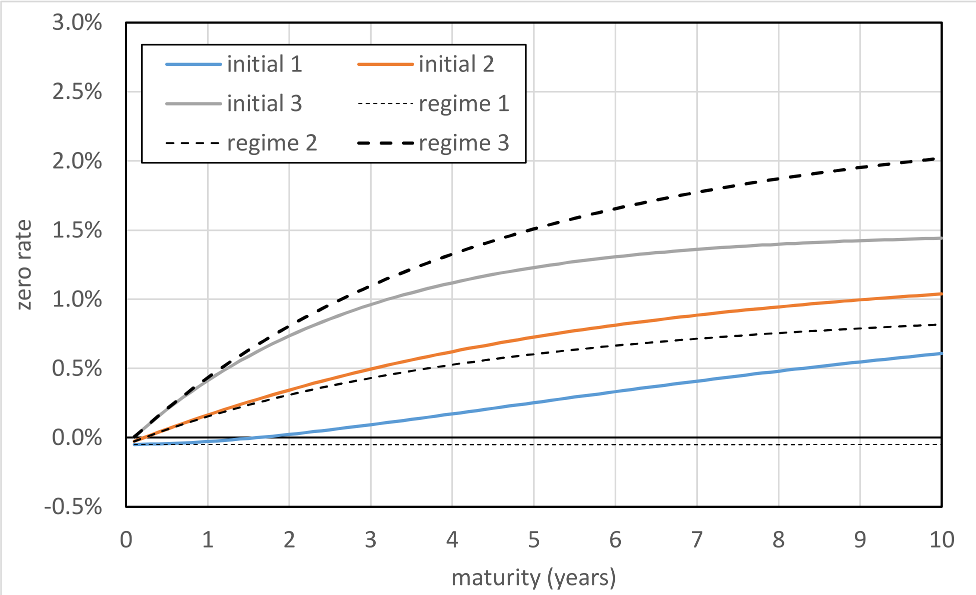

図 1: ゼロレートの期間構造　$r(0) = -0.05\%$

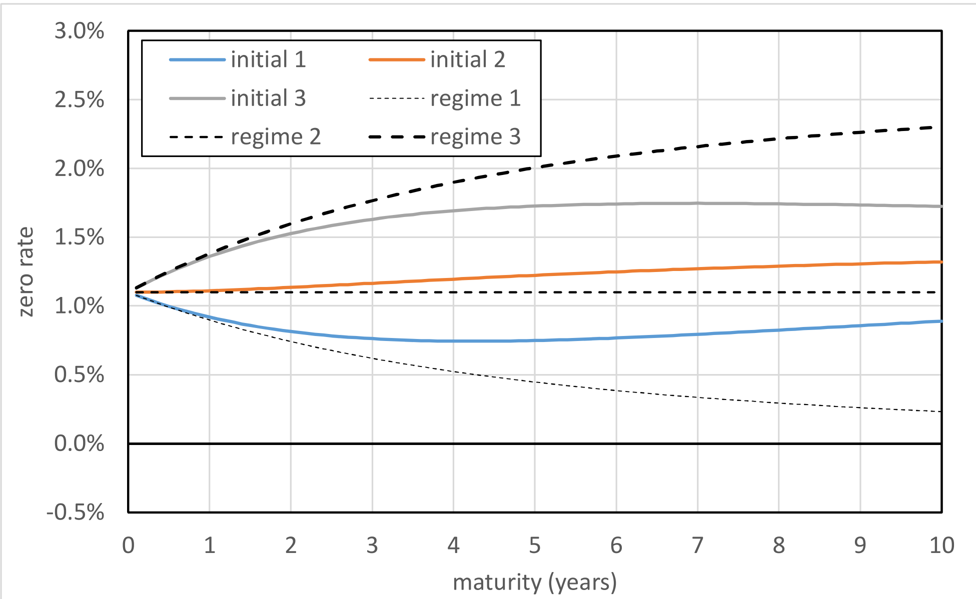

図 2: ゼロレートの期間構造　$r(0) = 1.1\%$

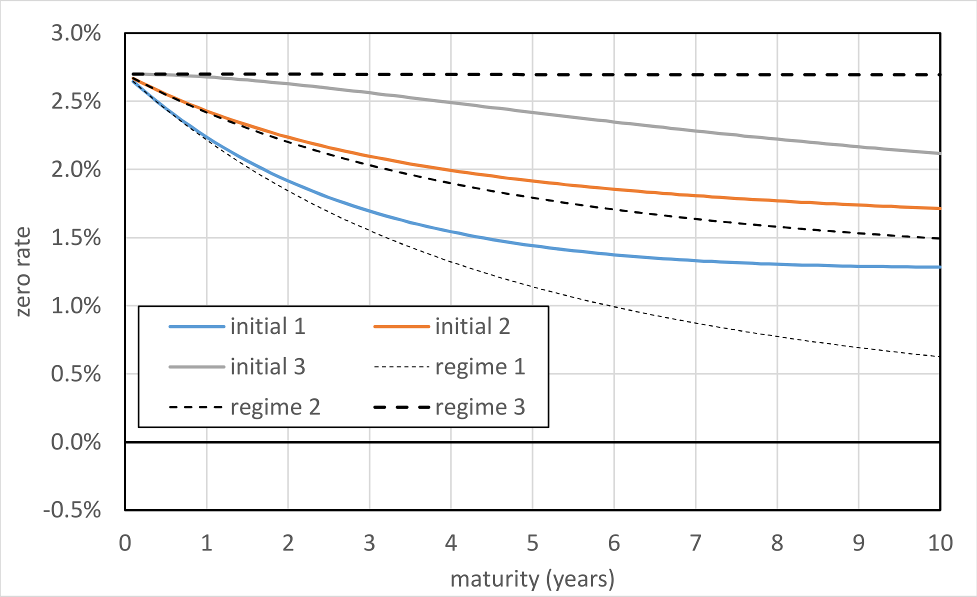

図 3: ゼロレートの期間構造　$r(0) = 2.7\%$

り，リスク中立確率 $\widetilde{P}$ 下のレジーム k における平均回帰水準は，観測確率 P 下の平均回帰水準に比べて $-\sigma_k\lambda/a$ だけ変化するので，$\lambda > 0$ のときは平均回帰水準が低下し，$\lambda < 0$ のときは平均回帰水準が上昇する．また，その低下幅あるいは上昇幅は σ_k が高いレジームほど大きくなるが，今扱っている数値例では，中金利のレジームでは金利期間構造のカーブの上昇・下落は顕著に見られるが，超低金利のレジームでは上昇・下落はあまり明確にならない．

本節では金利期間構造のパラメータ依存性を簡単に示したが，以上の結果から，提案モデルによる金利期間構造はさまざまな形状の滑らかなカーブを描きうることがわかる．

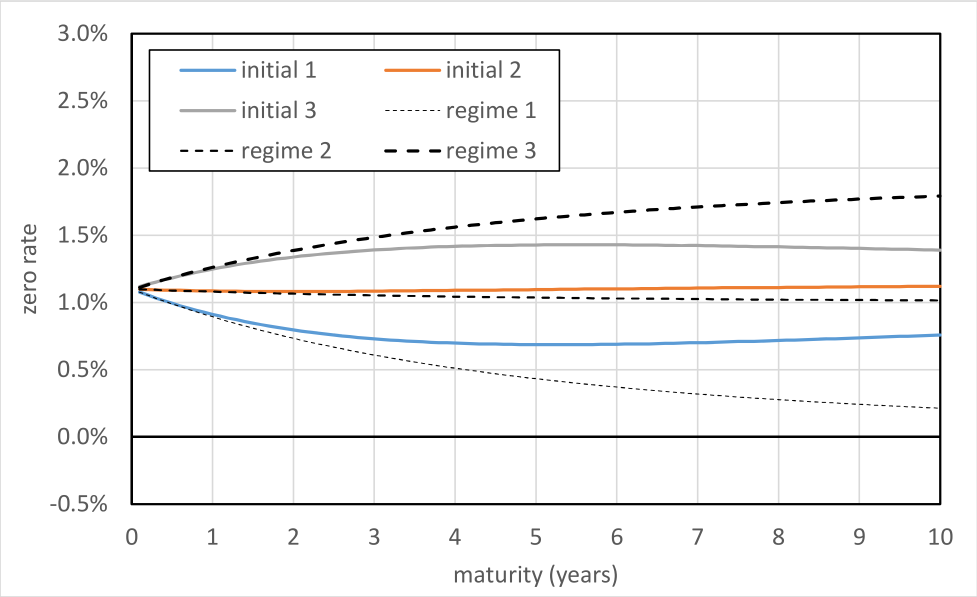

図 4: ゼロレートの期間構造　$r(0) = 1.1\%$, $\lambda(t) = 0.5$

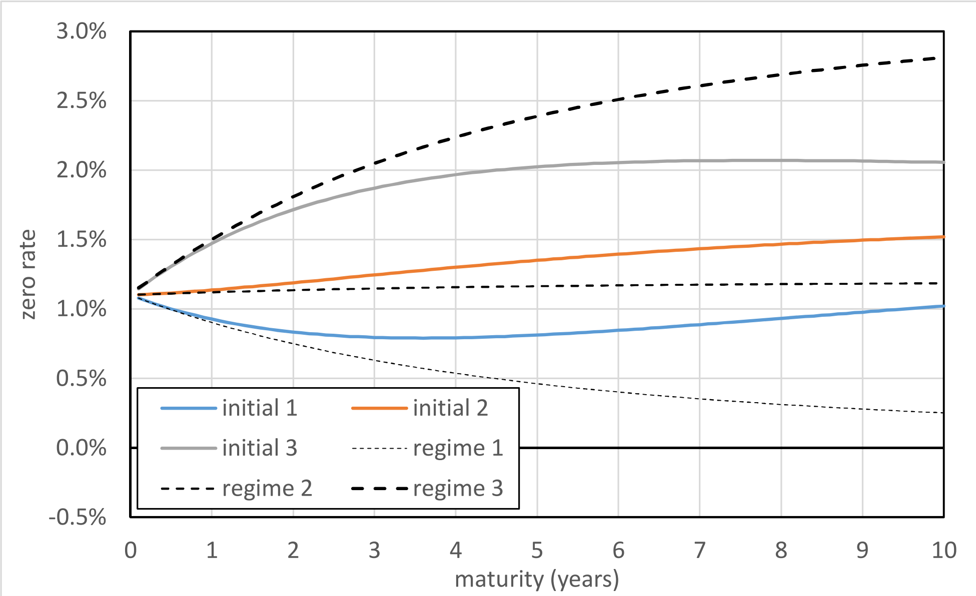

図 5: ゼロレートの期間構造　$r(0) = 1.1\%$, $\lambda(t) = -0.5$

5.2　カリブレーション

次に，まだ試験的な推定結果ではあるが，カリブレーションの数値例を示すことで，この提案モデルにより現時点の金利期間構造を概ね再現できることを示す.「現時点の金利期間構造を再現できること」は，市場性資産からなるポートフォリオの金利リスク計測との統合評価を検討する際に，あるいは流動性預金の金利リスク評価を金利ストレステストの一部に組み込むことを検討する際に，モデルが持つべき性質として好ましい.

各レジームの推定値には表 1 の値を使用する[6]. さらに本節では，実際のデータに対して提案したカリブレーション手法が有効であることを示すため，観測確率 P 下の generator $\mathcal{Q}$ には，2003 年 1 月から 2018 年 2 月の 1ヶ月 LIBOR の月次時系列データから EM アルゴリズムを用いて推定された

$$\hat{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} -0.05 & 0.04 & 0.01 \\ 0.08 & -0.17 & 0.09 \\ 0 & 0.14 & -0.14 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

を使用する. この $\mathcal{Q}$ は，1 年間のレジーム遷移確率行列に変換すると，

$$\begin{pmatrix} 0.952 & 0.037 & 0.011 \\ 0.072 & 0.850 & 0.078 \\ 0.005 & 0.120 & 0.875 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

に相当する. なお，本節以降のすべての計算では (5.2) の $\mathcal{Q}$ を使用する.

[6] 推定方法の詳細は今後，別の論文で紹介する予定である.

5.2.1　ケース A

ケース A では，現在時点 $t=0$ におけるゼロレート（割引債の最終利回り）が，期間を T（年）として

$$R(T) = -0.001 + 0.0016T - 0.00005T^2, \qquad 0 \le T \le 10, \tag{5.4}$$

（$R(T)=0.01$ は 1.0%を表す）で与えられる場合を考える．具体的には，(5.4) により与えられる 1 年ごとのゼロレートの値を正確に再現するようなリスク中立確率 $\widetilde{P}$ のもとにおける generator $\widetilde{\mathcal{Q}}$ とリスクの市場価格 $\lambda(t)$ を推定する．例えば，初期時点のレジームが 1 であったとすると，4.2 節の方法による generator $\widetilde{\mathcal{Q}}$ の推定値は

$$\hat{\widetilde{\mathcal{Q}}} = \begin{pmatrix} -0.597 & 0.195 & 0.402 \\ 0.183 & -0.184 & 0.001 \\ 0 & 0.178 & -0.178 \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

となり，リスクの市場価格 $\lambda(t)$ は 1 年ごとに一定値をとる，すなわち $\lambda(t)=\lambda_i,\ i-1 \le t < i,\ i = 1,\cdots,10$ と仮定すると表 2 の 2 行目（ケース A）のようになる．

表 2: リスクの市場価格の推定値

区間（年）	$[0,1]$	$[1,2]$	$[2,3]$	$[3,4]$	$[4,5]$	$[5,6]$	$[6,7]$	$[7,8]$	$[8,9]$	$[9,10]$
ケース A	−2.145	0.995	−0.244	0.759	−0.304	0.348	−0.490	0.044	−0.560	−0.069
ケース B	−0.602	0.815	−0.437	0.548	−0.466	0.330	−0.464	0.173	−0.446	0.049

これらの推定値を用いて算出された金利期間構造を図 6 に示す．図 6 の横軸は期間（年），縦軸はゼロレート（%）である．この図より，generator $\hat{\widetilde{\mathcal{Q}}}$ だけでは入力値である金利期間構造を完全に再現することはできないが，リスクの市場価格 $\hat{\lambda}(t)$ も用いることでゼロレートの入力値を完全に再現できることがわかる．また，generator だけを考慮した場合の金利期間構造は，5 年未満では入力値（×印）を下回り，その後は上回るというように入力値を上下しているが，これは定性的に generator の推定がうまく機能している（入力値から大きく乖離しない結果を与えている）ことを示唆している．なお，この図では 2 年以下の金利期間構造に不自然な歪曲が見られるが，より短い間隔，例えば 0.5 年ごとにゼロレートの入力データを設定することにより，このような歪曲を回避できると考えられる．

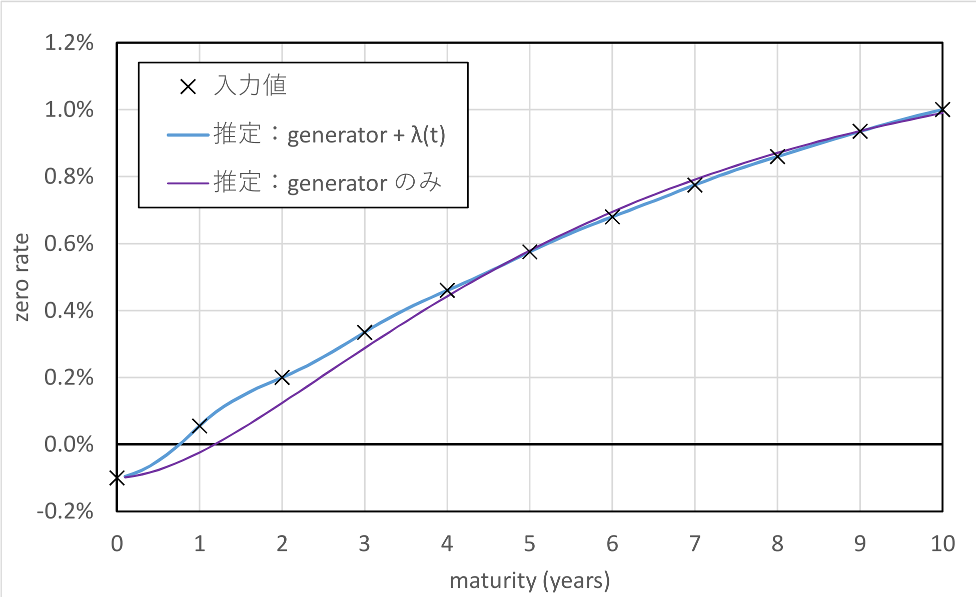

図 6: カリブレーション：ゼロレートの期間構造 （ケース A）

5.2.2 ケース B

ケース B では，$t = 0$ におけるゼロレートが

$$R(T) = 0.02, \qquad 0 \leq T \leq 10, \tag{5.6}$$

すなわち 2.0% フラットで与えられる場合を考える．ここでも初期時点のレジームが 1 であったとすると，4.2 節の方法による generator $\widetilde{\mathcal{Q}}$ の推定値は

$$\hat{\widetilde{\mathcal{Q}}} = \begin{pmatrix} -4.595 & 0.914 & 3.681 \\ 0.002 & -0.136 & 0.134 \\ 0 & 0.154 & -0.154 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

となり，リスクの市場価格 $\lambda(t)$ は 1 年ごとに一定値をとると仮定すると表 2 の 3 行目（ケース B）のようになる．

これらの推定値を用いて算出された金利期間構造を図 7 に示す．図の横軸は期間（年），縦軸はゼロレート（%）である．図 7 からも，generator $\hat{\widetilde{\mathcal{Q}}}$ だけでは実際の金利期間構造を再現することは難しいが，リスクの市場価格 $\hat{\lambda}(t)$ も用いることで再現できることがわかる．また，この図でも 2 年以下の金利カーブに不自然な歪曲が見られるが，より短い間隔で金利のデータを与えることにより歪曲を回避できると考えられる．

本節で示したのは 2 例だが，与えられた金利期間構造は提案モデルでおよそ再現できると考えている．この再現性は実務で使用する金利モデルにとって必要な条件であり，過大な計算負荷をかけずにパラメータを推定できることは非常に望ましい．

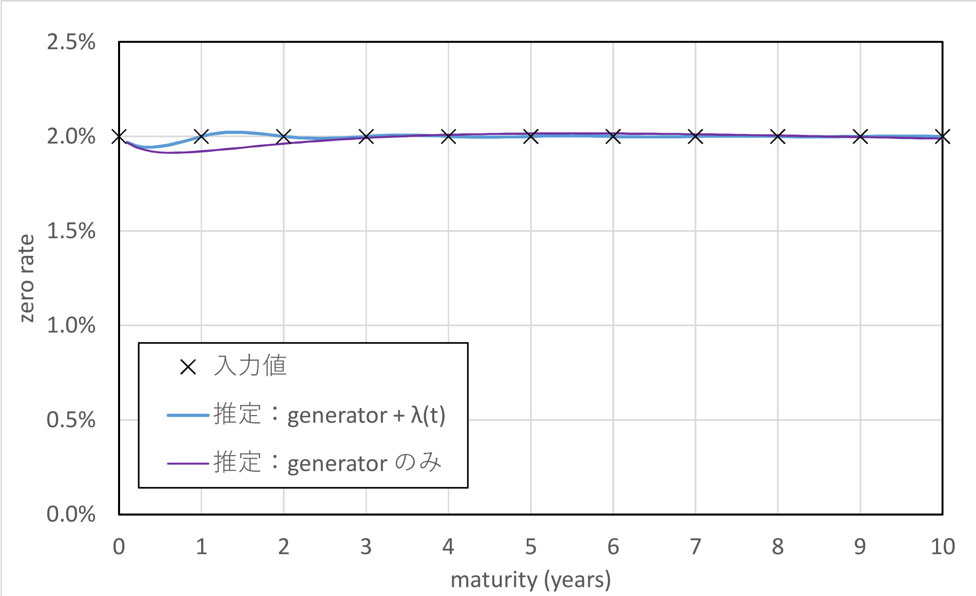

図 7: カリブレーション：ゼロレートの期間構造 （ケース B）

5.3 将来の短期金利の分布と金利期間構造

以下では，5.2.1 節のケース A でレジーム遷移を考慮した MRSEV モデルと，同じ設定のもとでレジーム推移を考慮せず常にレジーム 2 に留まると仮定した場合（この場合は拡張 Vasicek モデルに相当するので，本節ではこれを拡張 Vasicek モデルと呼ぶ）におけるモンテカルロシミュレーションの結果を示し，レジーム遷移の効果を示す．

現在時点 $t = 0$ でレジーム $\boldsymbol{X}(0) = (1, 0, 0)$，短期金利 $r(0) = -0.001$（-0.1%）とし，シミュレーションのタイムステップ Δt は 1×10^{-3} 年として 10 年先までの計算を $10,000$ 回行った．計算時間は Intel Core i5-6200U CPU @230GHz の PC で約 3 分であった．

図 8 に拡張 Vasicek モデルによる将来の瞬間的な短期金利 $r(t)$ の将来（2, 4, 6, 8, 10 年後）の分布を示す．横軸は短期金利，縦軸は頻度である．拡張 Vasicek モデルでは将来の短期金利は正規分布に従い，分布は広がりながら次第に右方向（平均回帰水準 1.1%の方向）へとシフトしていく．また，図 9 にパーセント点および平均値（average）の時間推移を示す．この図からも，分布が緩やかに広がりながら全体として上昇していくこと，その間に分布の概形はあまり変化していないことがわかる．なお，ここで示した平均値は将来の各時点における短期金利の分布から求めた平均値を繋いだ線であり，この線に対応する短期金利のサンプルパスがあるわけではない．これは後述する図 13 でも同様である．

図 10 は，本稿で提案した MRSEV モデルによる将来の瞬間的な短期金利 $r(t)$ の将来（2, 4, 6, 8, 10 年後）の分布である．この図からは，短期金利の初期値の周辺にできた分布のピークはその後数年間にわたり鋭い形状のまま維持されることと，時間が経つにつれて正の領域に分布が現れることがわか

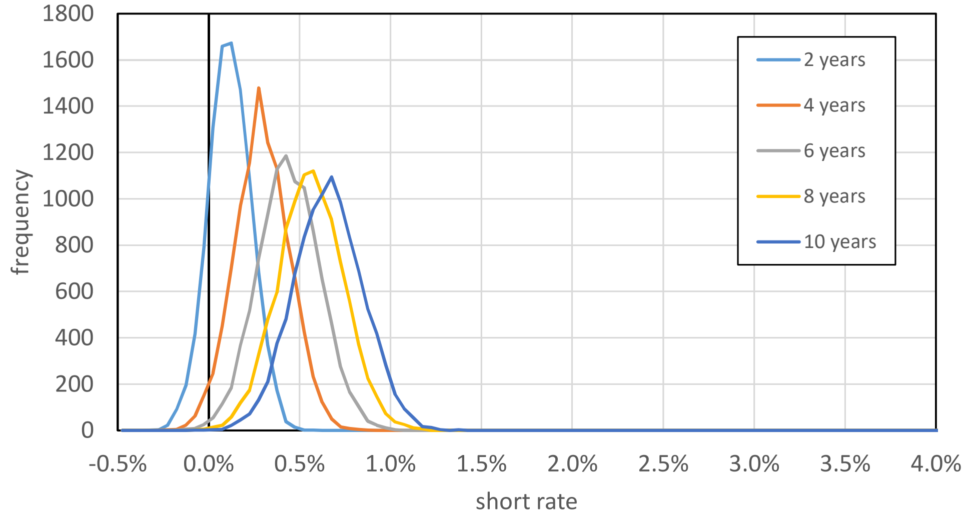

図 8: 将来の短期金利の分布（拡張 Vasicek モデル）

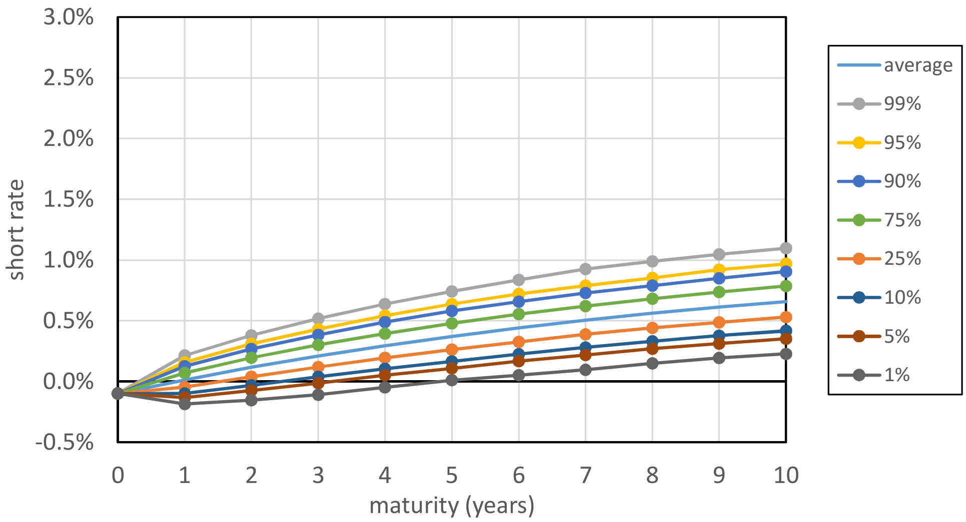

図 9: 将来の短期金利のパーセント点の時間推移（拡張 Vasicek モデル）

る程度であるが，図 8 の拡大図である図 11，図 10 の拡大図である図 12 をあわせて見ると更に詳しいことがわかる．図 10 と図 12 によると，前述のように MRSEV モデルによる将来の短期金利の分布は数年間にわたり初期値付近に鋭いピークを保ち続けるが，左裾はほとんど変わらず，右裾だけが次第に延びてテールの厚い分布になっていく．左側の分布の裾が厚くならないのは，初期値よりも金利が低い側に別のレジームが存在しないこと，そしてレジーム 1 のボラティリティが $\sigma_1 = 0.02\%$ と非常に小さいためである．一方，右側の分布の裾が次第に厚くなっていくのは，より金利の高いレジームへの遷移の効果である．レジーム 2 やレジーム 3 への遷移により平均回帰水準が高くなり，しかも平均回帰力 0.4 が通常の Vasicek モデルよりも高いため[7]，平均回帰水準へと急速に移行していく．一方で，レジーム 2 やレジーム 3 の領域にピークが現れないのは，それらのレジームではボラティリティが高いことと，レジームは突然遷移するが金利自体は連続的に変化していくためである．その結果，図 8 の拡張 Vasicek モデルの場合のように当初から目立つピークが金利の高い方向にシフトしていくこともなければ，その場に留まって分布が広がっていくこともなく，当初からのピークがあまり形状を変えないまま次第に低下し，その代わりに少しずつ右側の裾だけが時間とともに広がっていく．さらに図 12 からは，長く延びた右裾の確率は決して無視できないことも読み取れるが，後述するように，この確率が Volume at Risk のようなリスク尺度に明確に反映されることになる．

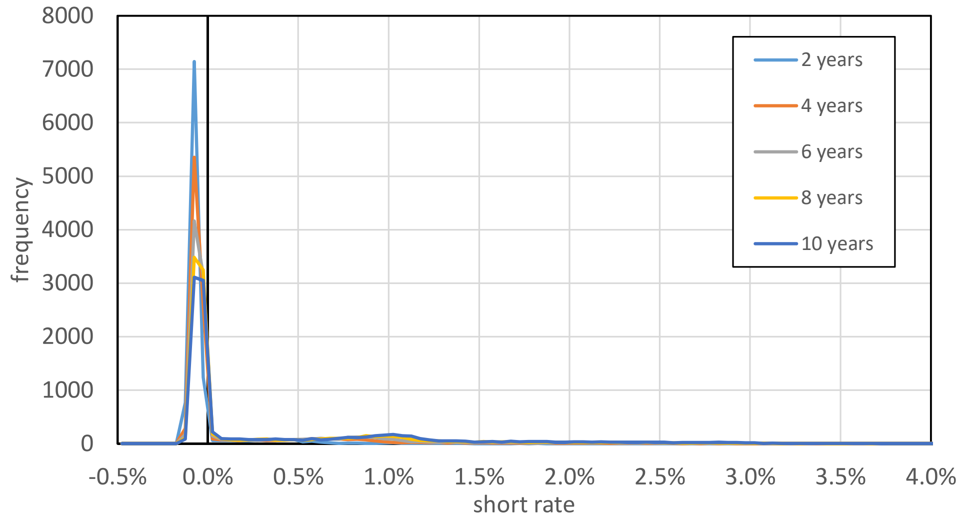

図 10: 将来の短期金利の分布（MRSEV モデル）

図 13 は MRSEV モデルによるパーセント点の時間推移であるが，ここには前述の結果が顕著に反映されている．この数値例では，1%点や 5%点だけでなく，25%点までが 10 年経ってもあまり変動せずにマイナス金利に留まるが，平均値（average）は時間とともに緩やかに上昇し，確率 90%以上

[7]平均回帰力は 0.1 あるいはそれ以下になると思われているが，6.2 節では遥かに低い値が推定された．

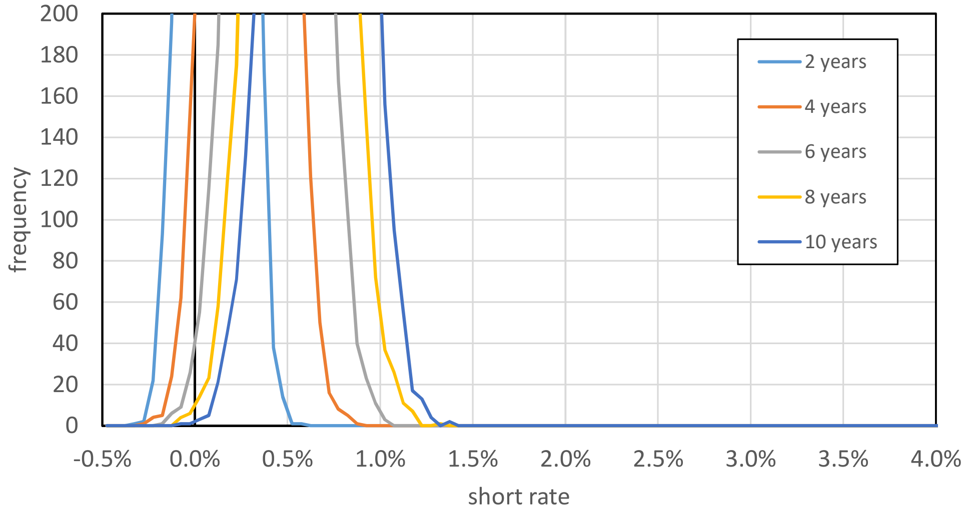

図 11: 将来の短期金利の分布（拡張 Vasicek モデル，拡大図）

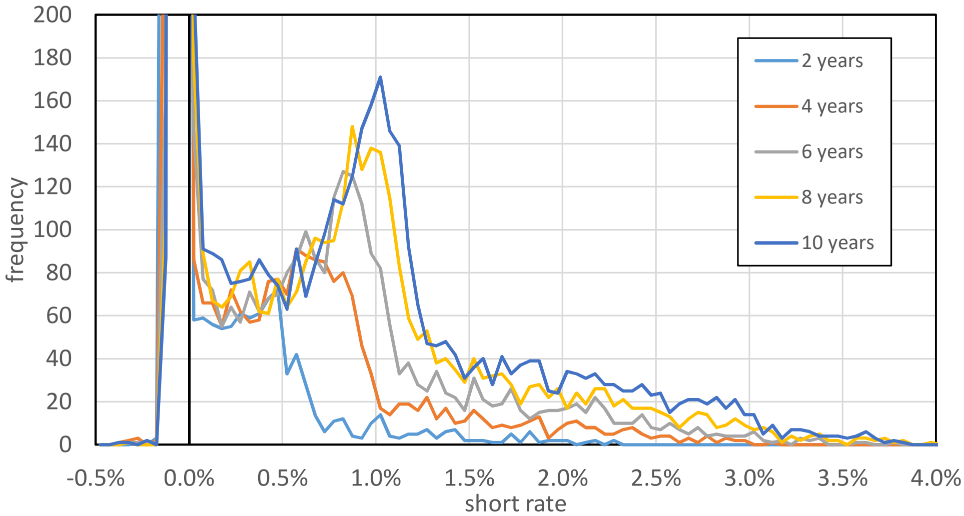

図 12: 将来の短期金利の分布（MRSEV モデル，拡大図）

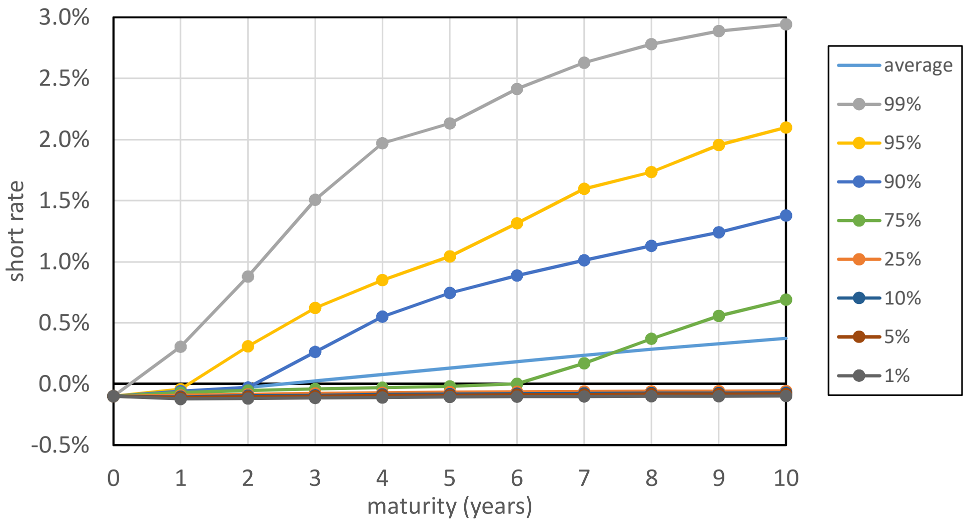

図 13: 将来の短期金利のパーセント点の時間推移（MRSEV モデル）

のパーセント点にいたっては，それぞれある時点から急速に上昇していく．図 12 からもわかるように，このモデルによって生成される将来の短期金利の分布は，時間とともに右裾に長く伸びていく極めて非対称性の強い分布であり，この特徴は時間の経過とともに顕著になっていく．この分布の非対称性は，平均値（average）が当初 7 年間は 75%点を越える水準にあることにも顕著に表れている．

図 14 および図 15 は，拡張 Vasicek モデルと MRSEV モデルにおけるあるサンプルパスの 1 年毎の金利期間構造の推移を示したものである．これらの図で，横軸の 1 年から 10 年にかけて伸びている水色のカーブは 1 年後の期間 0 年から 9 年までのゼロレートカーブ，横軸の 2 年から 10 年にかけて伸びている橙色のカーブは 2 年後の期間 0 年から 8 年までのゼロレートカーブであり，他のカーブも同様の意味を持つ．これらの将来時点 t における金利期間構造は，モンテカルロシミュレーションで発生させたあるサンプルパスの時刻 t における $(X(t), r(t))$ を初期状態として，3.3 節で述べた常微分方程式系 (3.11) をそれぞれの満期 T における境界条件 (3.10) のもとで数値的に解いて求めた割引債価格 $P(t,T)$ から求めたゼロレートを繋いだものである．図 15 のサンプルパスでは，3 年目から 4 年目の間にレジーム 2（中程度の金利状態）に遷移し，その後しばらくレジーム 2 に留まり，9 年目から 10 年目の間にレジーム 1（超低金利状態）に遷移している．図 15 の金利期間構造はこのレジーム遷移の結果を反映し，1 年目から 3 年目までの金利期間構造はおよそ 0% から始まる超低金利の期間構造であるが，4 年目以降は金利の短期部分が上昇し，10 年目にはまた低下へと転じている．

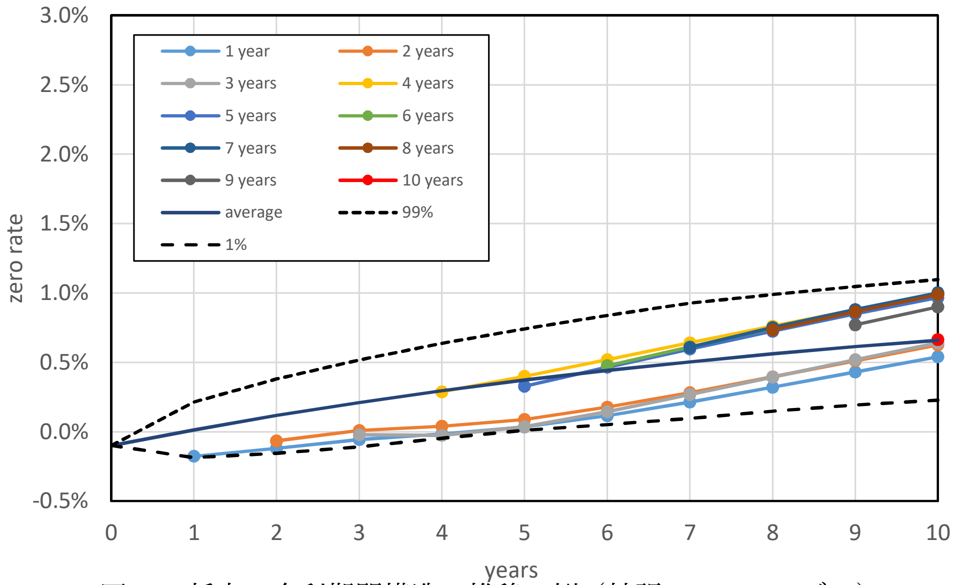

図 14: 将来の金利期間構造の推移の例（拡張 Vasicek モデル）

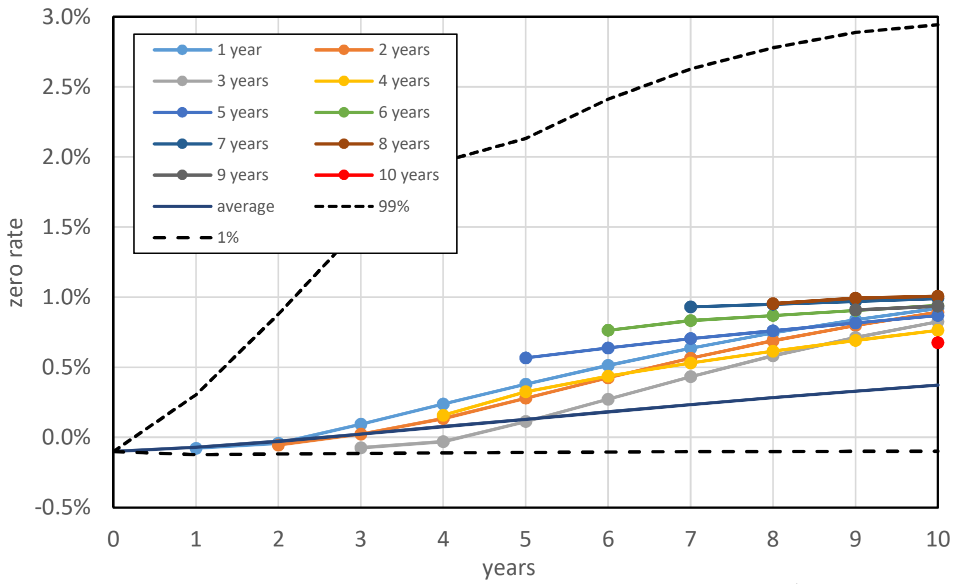

図 15: 将来の金利期間構造の推移の例（MRSEV モデル）

5.4　流動性預金残高と金利の関係

流動性預金残高と金利の関係性に関しては，ここではデータフォアビジョン [21] に記載されている金利と残高増加率の関係式を一部変更して使用する．データフォアビジョン [21] では金利期間構造を扱っていないので短期金利と残高増加率の関係式を与えているが，本稿ではそれを 1ヶ月金利あるいは 1 年金利との関係式として扱う．具体的には，時刻 t における個人流動性預金残高を $L_1(t)$，法人流動性預金残高を $L_2(t)$，前月比を $R_{L_i}(t) \equiv L_i(t+\Delta t)/L_i(t), i = 1, 2$，$\Delta t = 1/12$（1ヶ月）として，

$$R_{L_1}(t) = 1.00904 - 0.00769\sqrt{\max(R(t, t+\Delta t_1) + 0.001, 0)(\%)}, \qquad \text{個人流動性預金} \tag{5.8}$$

$$R_{L_2}(t) = 1.01008 - 0.01988\sqrt{\max(R(t, t+\Delta t_2) + 0.001, 0)(\%)}, \qquad \text{法人流動性預金} \tag{5.9}$$

とし，総流動性預金残高は $L(t) = L_1(t)+L_2(t)$ とする．さらに，それぞれの初期値を $L_1(0) = 1.6\times10^6$ 万円，$L_2(0) = 1.0\times10^6$ 万円とし，$\Delta t_1 = 1/12$（$R(t, t+\Delta t_1)$ は時刻 t における 1ヶ月金利），$\Delta t_2 = 1$（$R(t, t+\Delta t_2)$ は時刻 t における 1 年金利）とする．1ヶ月金利と 1 年金利は時刻 t における短期金利 $r(t)$ をもとに，その時点における割引債価格の期間構造から求める．(5.8) と (5.9) より，このモデルでは当該期間の金利が -0.1%以下のとき，残高増加率の金利依存性は消失する．

5.5　預金残高の分布の時間変化

図 16 と図 17 は，拡張 Vasicek モデルによる流動性預金残高分布の時間推移と，分布のパーセント点（1%点，5%点，10%点，25%点，75%点，90%点，95%点，99%点）及び平均値（average）の時間推移である．ここで平均値は各時点における預金残高分布から求めた平均値を繋いだ線である．

図 16 より，拡張 Vasicek モデルによる流動性預金残高は平均値（average）のまわりになだらかに広がる，右側の裾がやや厚めの分布に従うことがわかる．右側の裾がやや厚めになるのは，5.4 節で設定した残高増加率のモデルが金利に関して非対称であるためである．また，平均的には当初は残高が増え，数年後には減少に転じるが，これは金利の動向を反映している．図 9 によると，将来の平均金利は当初は極めて低く，これを反映して預金残高の平均値は増加するが，間もなく金利が上昇傾向に入ることに対応して預金残高の平均値は低下していく．もちろん超低金利にとどまるサンプルパスも存在して預金残高が高くなることもあるが，その確率は時間が経つにつれて低下する．結果として将来の流動性残高は全体として低下傾向になり，残高が上昇する確率は限定される．

図 17 は，残高分布のパーセント店の時間推移を示したものである．預金残高の 1%点，5%点，10%点は当初の 1 年間上昇するだけで 2 年目には減少に転じ，平均値は 2 年目まで上昇して 3 年目から減少する．99%点が減少に転じるのは 6 年目以降であり，10 年後でも当初の残高を十分超えている．

ここで示した拡張 Vasicek モデルは単に MRSEV モデルでレジーム遷移を考慮しない場合に過ぎないが，得られた結果は将来金利が正規分布に従うモデルを用いて評価した場合の特徴を顕著に示して

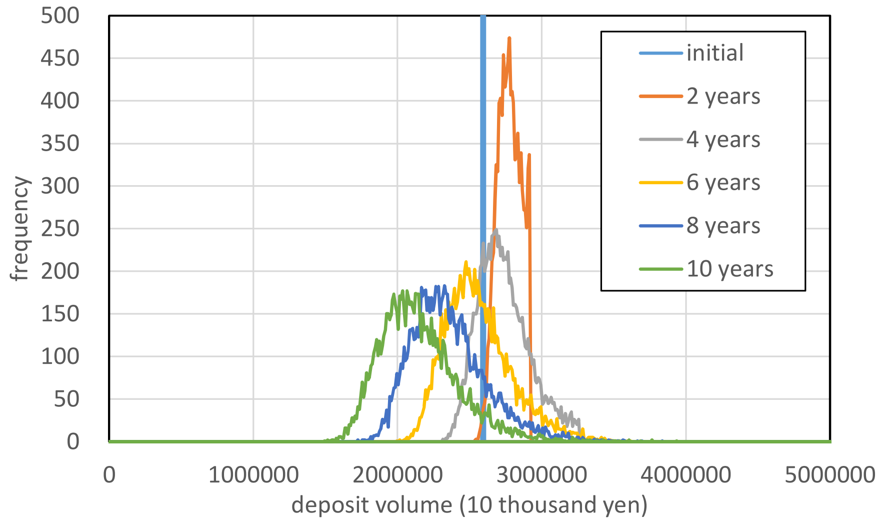

図 16: 将来の流動性預金残高の分布（拡張 Vasicek モデル）

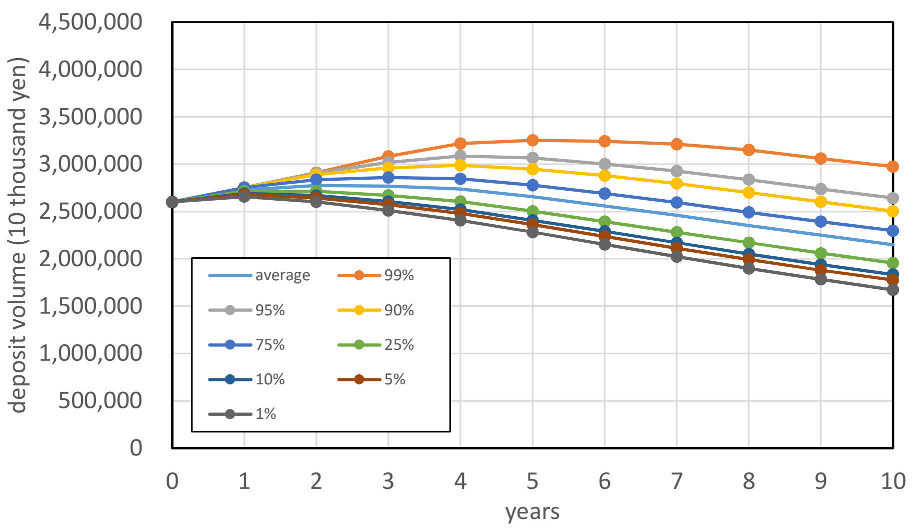

図 17: 将来の流動性預金残高のパーセント点の時間推移（拡張 Vasicek モデル）

いる．拡張 Vasicek モデルでは将来の短期金利は左右対称に広がる正規分布に従うが，将来的に短期金利がマイナス方向に深く沈んでいくことはありえないので，それを避けるためには図 8 のように短期金利を正方向にシフトさせるため，平均回帰水準 m と平均回帰力 a にある程度高い値を設定しなければならない．その結果として得られる将来残高の一般的な傾向が上述した残高推移の特性である．

このようなパラメータ設定をした場合の結果で特筆すべきことは，平均的には流動性預金残高はほどなく（ここでは 3 年目に）減少に転じ，数年後にはかなりの割合が流出する，という結果が得られることである．この結果は，少なくとも残高に減少傾向が全く見られない現時点において妥当な予想と言えるかどうか，大いに疑問である．また，拡張 Vasicek モデルでは，将来的にマイナス金利に深く進んでいかないようにするためには，ボラティリティ σ をある程度低い値にして残高分布があまり広がらないようにしなければならないが，それはリスクの過小評価につながりかねない．

図 18 は MRSEV モデルによる将来の流動性預金残高の分布である．この図から，MRSEV モデルによる将来の流動性預金残高の分布は拡張 Vasicek モデルの場合よりも鋭いピークを長期間維持する一方で，次第に左側に長い裾を伸ばしていくことがわかる．分布のピークは現在の残高に見られる上昇傾向をそのまま維持して右にシフトし，左裾はピークのような確率の塊を作らないまま左側に深々と伸びていく．これらの傾向は図 19 のパーセント点の時間推移に明確に表れている．75%以上のパーセント点は時間が経過しても滑らかに増加していく一方で，10%以下のパーセント点はそれぞれある時期から急激に減少に転じ，1%点にいたっては 10 年間で当初の残高の半分を下回る．

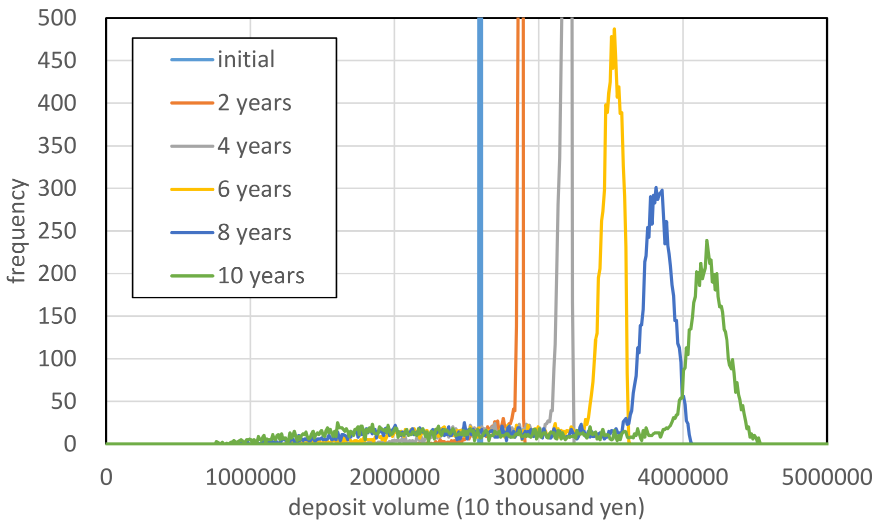

図 18: 将来の流動性預金残高の分布（MRSEV モデル）

これらの残高変化の特徴にも将来の金利の動向が反映されている．MRSEV モデルでは，時間が経過しても将来の短期金利がマイナス方向に深く沈んでいくことは極めて低い確率でしか発生せず，初

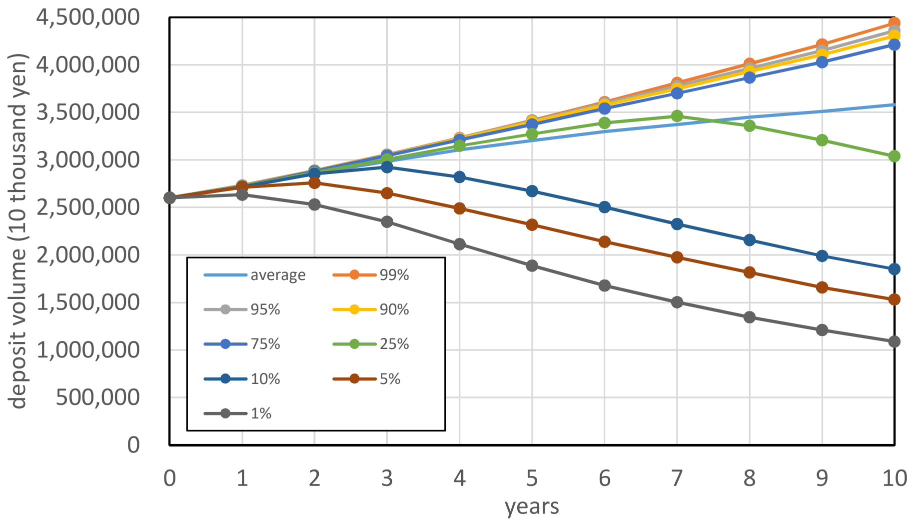

図 19: 将来の流動性預金残高のパーセント点の時間推移（MRSEV モデル）

期のレジーム（ここではレジーム 1）の領域に分布のピークが残るため，将来の残高にも現在の残高の動向が強く反映されて平均値（average）のカーブは上昇を続ける．一方，将来の金利上昇確率は次第に増加し，かつ金利上昇時には幅広い範囲に分布することになるので[8]，決して高くない確率で残高減少パスが現れ，しかも幅広い金利の分布を反映して減少量も幅広い値をとる．以上のように，MRSEV モデルによる将来の流動性預金残高は拡張 Vasicek モデルに比べて幅広い分布となり，平均的には現状とそれほど変わらない傾向で推移する一方，10 年間で残高が半減するような極端な事象が発生する確率も少なからず存在する．

上述した MRSEV モデルによる結果は，残高に減少傾向が全く見られない現時点では受け入れやすく，しかも流動性預金のリスク管理にも使える結果である．もちろん計算結果はパラメータの値に強く依存するので，詳細な議論を行うにはより詳細な数値実験によるモデルの特性分析が必要である．

5.6　コア預金の滞留期間の分布

前項までの結果をもとに，拡張 Vasicek モデルと MRSEV モデルのそれぞれから得られるコア預金の滞留時間の分布と，分布から得られる平均滞留期間を表 3 に示す[9]．表 3 で滞留期間 0 年のコア預金額が 0 になっているが，これは 1 年目の残高分布の 1% 点が当初の残高を上回っていることを意味している．この結果では MRSEV モデルによる平均滞留期間は拡張 Vasicek モデルに比べて 1.3 年程度短くなっているが，これがレジーム遷移の効果である．

[8] 金利の高いレジームほどボラティリティが高いため．
[9] ここでは残高分布の 1% 点をもとにコア預金額を算出している．

表 3: コア預金の滞留期間の分布 (単位：$\times 10^5$ 万円)

	滞留期間 (年)											平均滞留期間 (年)
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
拡張 Vasicek モデル	0	0.55	0.91	1.04	1.26	1.30	1.28	1.24	1.15	1.11	16.72	8.28
MRSEV モデル	0	1.04	1.80	2.35	2.29	2.09	1.76	1.57	1.35	1.20	10.89	6.96

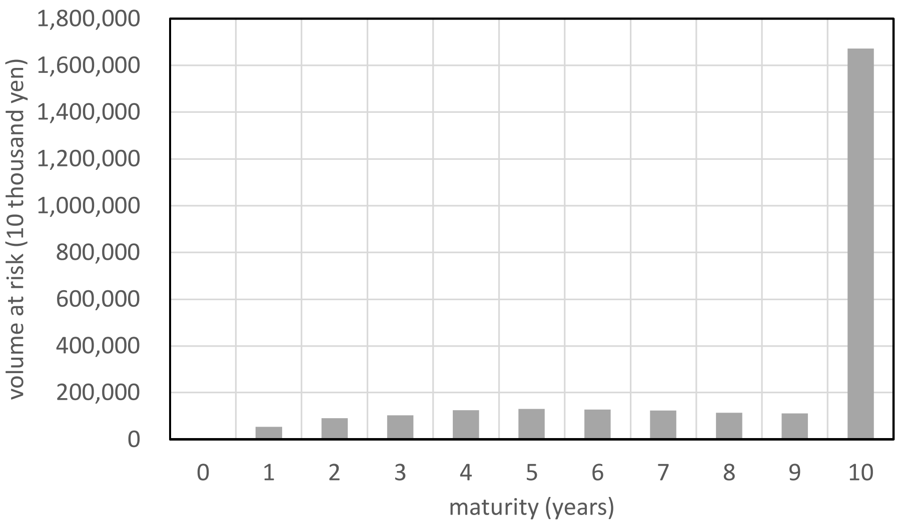

図 20: コア預金の滞留期間の分布（拡張 Vasicek モデル）

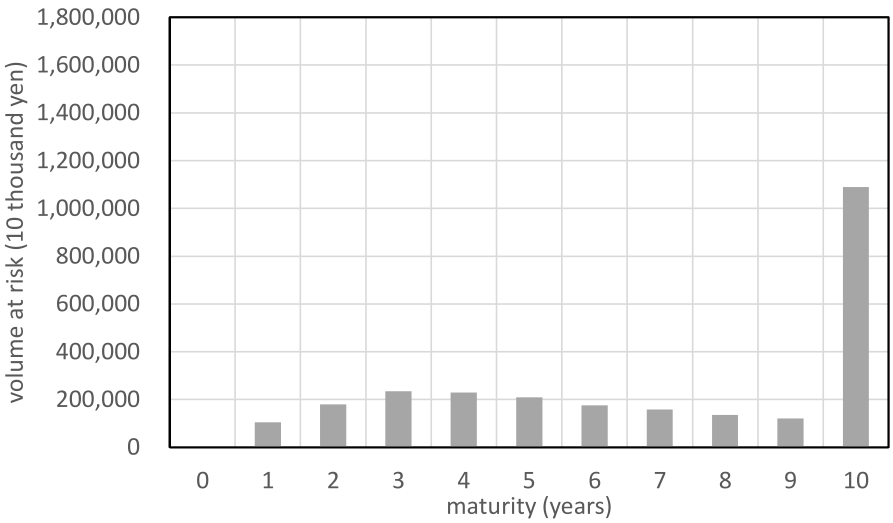

図 21: コア預金の滞留期間の分布（MRSEV モデル）

参考のため，図 20 と図 21 にそれぞれのモデルによるコア預金の滞留期間の分布を示す．これらの図では滞留期間 10 年のコア預金額にかなり大きな差が見られる．拡張 Vasicek モデルで MRSEV モデルと同程度の結果を得るためには，将来の金利の上昇をより急激にするか，あるいは金利のボラティリティを高めることが考えられる．前者を選択すると，ますます残高分布は全体として低下傾向を強めることになり，現状でみられる上昇傾向にそぐわない．後者を選択すると，将来の金利がマイナス方向に深く入り込む可能性が高まる．これらのバランスをとるためには，かなり恣意的なパラメータの操作が必要になると思われる．

6　最近の観測データから得られる計算結果

本節では，ほぼすべてのパラメータで観測データからの推定値を使用したときの計算結果を示す．以下では，本節のパラメータを用いた拡張 Vasicek モデルを Calibrated 拡張 Vasicek モデル，本節のパラメータを用いた提案モデルを Calibrated MRSEV モデルと呼ぶ．

6.1　使用するパラメータの値について

Calibrated MRSEV モデルの観測確率 P の下における金利モデルのパラメータは，2003 年 1 月から 2018 年 2 月までの 1ヶ月 LIBOR の月次時系列データから EM アルゴリズムにより求めた値をすべて使用する．5 節と異なるのは平均回帰水準 m_k で，推定値 $(m_1, m_2, m_3) = (-0.0005, 0.001, 0.007)$ をそのまま使用する．さらに，これだけ平均回帰水準が低いと，(5.4) や (5.6) のような期間構造をモデルで再現することが難しいので，本節では現時点 $t = 0$ でのゼロレートの期間構造を

$$R(T) = -0.001 + 0.001T - 0.00005T^2, \qquad 0 \leq T \leq 10, \tag{6.1}$$

とする．リスク中立確率 $\widetilde{P}$ の下における金利モデルのパラメータは，これらの情報をもとに推定し直した値を使用する．なお，レジームの初期値はレジーム 1 とする．

Calibrated 拡張 Vasicek モデルでは，Janosi et al.[8] が提案した方法を使い，(a, σ) を 2010 年 8 月から 2018 年 9 月までの LIBOR-SWAP 市場の金利期間構造の月次データから推定する．この方法では，金利期間構造（実際には割引関数の期間構造）の時系列データから各年限の割引関数の標準偏差を算出し，それらに最も良くあうようにパラメータ (a, σ) を推定する[10]．今回は年限として 3ヶ月，6ヶ月，1 年，3 年，5 年，10 年，20 年，30 年を選択した．必ずしもフィッティングが良いとは言えなかったが，短期（1 年以下）のみ用いるとパラメータは $(a, \sigma) = (0.0001, 0.00050)$，すべてを用いると $(a, \sigma) = (0.0001, 0.00063)$ で，a は常に 0.0001 になるが，標準偏差を長期まで使うほど σ の値は

[10] 具体的には，データから算出した隔年限のデータの標準偏差と，理論上の標準偏差（これらはモデルパラメータで表現できる）との相対誤差の二乗和が最小になるように，Micorosoft Excel のソルバーを用いて推定した．

大きくなった．そこで，以下では最も大きな推定値 $(a,\sigma) = (0.0001, 0.00063)$ で計算を行った．この推定法では平均回帰水準 m を推定できないが，今用いている流動性預金残高変化のモデルでは将来の金利が高くなるほど残高は低下するので，できるだけ将来金利を上昇させるため，5 節で用いた最も金利が高いレジームの値 $m = 0.027$（2.7%）を選択した．なお，$\widetilde{P}$ のもとでの拡張 Vasicek モデルのパラメータ $\phi(t)$ はフォワードレートの期間構造 (6.1) との整合性から一意に決まるが，詳細は省略する．また，流動性預金残高と金利の関係式はこれまでと同じである．

筆者らが入手可能なデータの制約から，2 つのモデルのパラメータ推定に使用したデータは完全に同じ期間，同じ種類のデータではないことに注意されたい．

6.2 Calibrated 拡張 Vasicek モデルの場合

Calibrated 拡張 Vasicek モデルによる将来の短期金利の分布を図 22，金利のパーセント点の時間推移を図 23，将来の流動性預金残高の分布を図 24，将来の預金残高分布のパーセント点の時間推移を図 25，コア預金の滞留期間の分布を図 26 に示す．

一般に，（拡張）Vasicek モデルのパラメータを実際のデータから推定すると，平均回帰力 a は小さい値が得られることが多く，平均回帰水準 m をどのように設定しても図 22 のように将来の短期金利の分布は現在の値の近傍に広がるだけで，図 8 のように金利が上昇傾向を辿る（平均回帰水準に近付く）ことは起こらない．その結果，図 24 のように流動性預金残高は現在の上昇傾向を維持し続けることになり，図 25 のように残高が減少する確率も残高の減少幅も小さく，コア預金の金利リスク管理に使えるような結果は得られない．また，このモデルによる平均滞留期間は 9.85 年で，計算上の上限値である 10 年からほとんど短くなっていない．

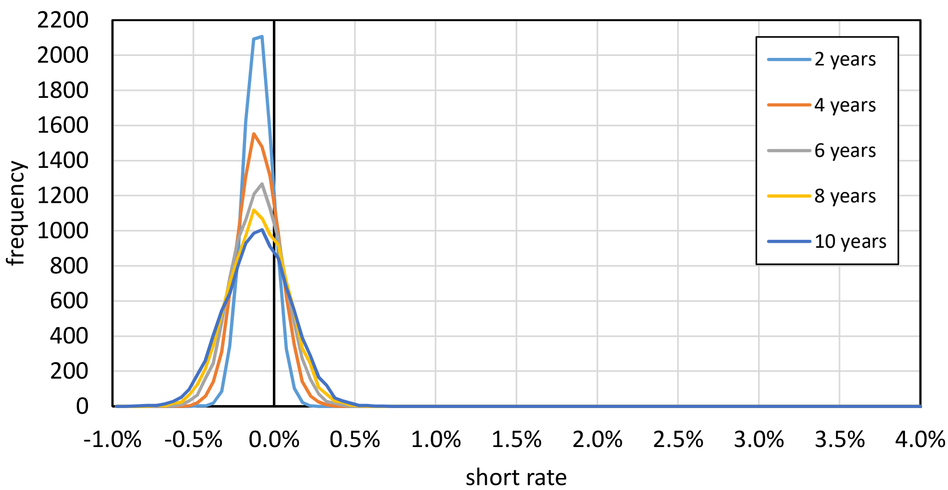

図 22: 将来の短期金利の分布（Calibrated 拡張 Vasicek モデル）

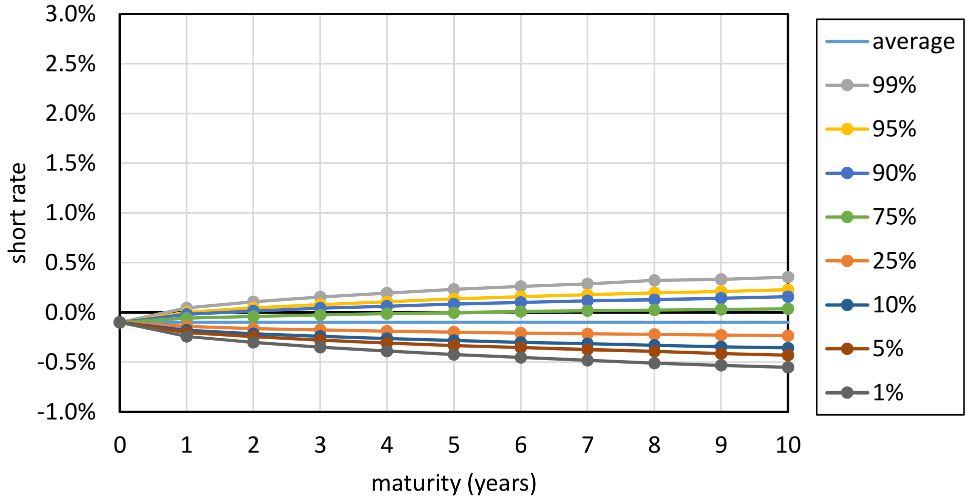

図 23: 将来の短期金利のパーセント点の時間推移（Calibrated 拡張 Vasicek モデル）

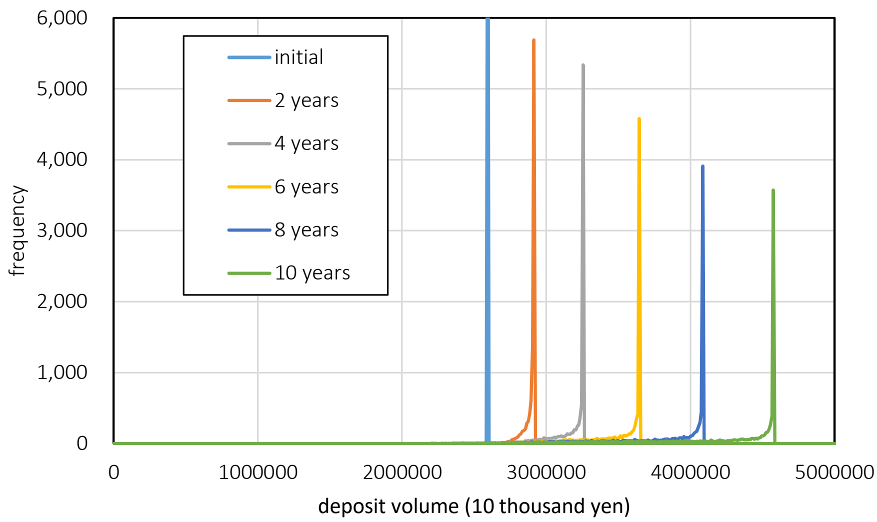

図 24: 将来の流動性預金残高の分布（Calibrated 拡張 Vasicek モデル）

本節のように拡張 Vasicek モデルでパラメータを過去の観測データから推定して用いる場合，現時点では，流動性預金の金利リスク管理に有益な情報を引き出すことは困難なようである．それでも金利リスク管理のために使うには，観測データからは決して得られないような高い平均回帰力 a や平均回帰水準 m を設定するなど，金利を上昇させるための恣意的な工夫が必要になると考えられる．

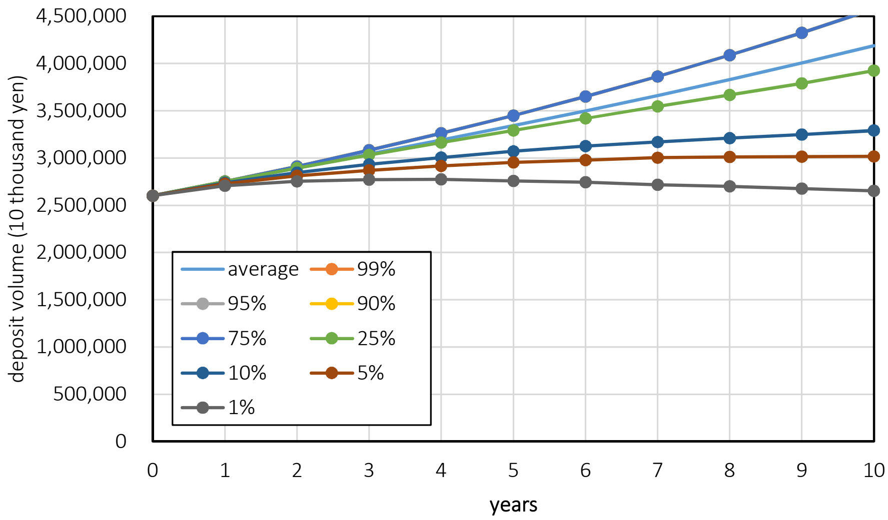

図 25: 将来の流動性預金残高のパーセント点の時間推移（Calibrated 拡張 Vasicek モデル）

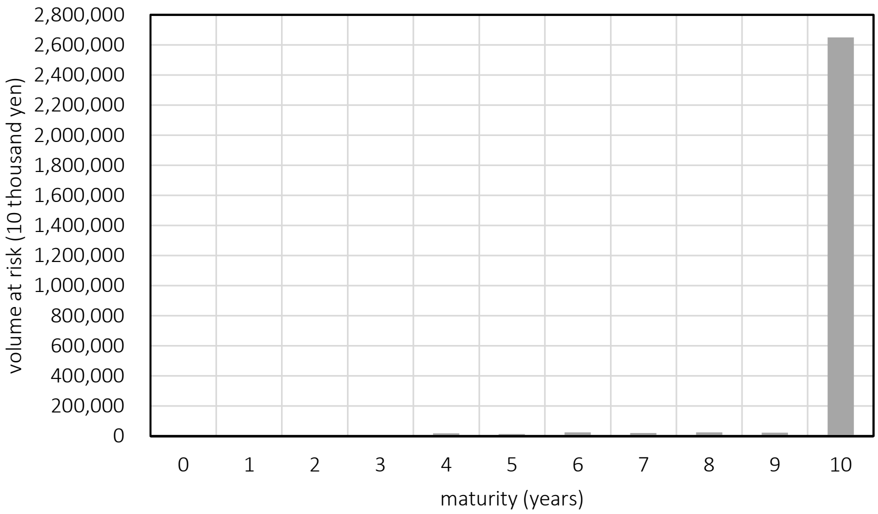

図 26: コア預金の滞留期間の分布（Calibrated 拡張 Vasicek モデル）

6.3　提案モデルの場合

Calibrated MRSEV モデルによる将来の短期金利の分布を図 27，金利のパーセント点の時間推移を図 28，将来の流動性預金残高の分布を図 29，将来の預金残高分布のパーセント点の時間推移を図 30，コア預金の滞留期間の分布を図 31 に示す．

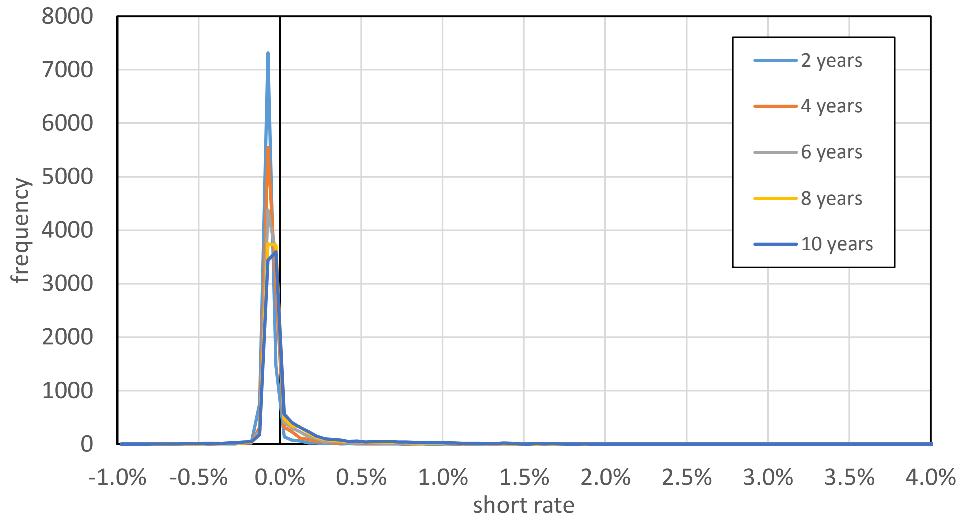

図 27: 将来の短期金利の分布（Calibrated MRSEV モデル）

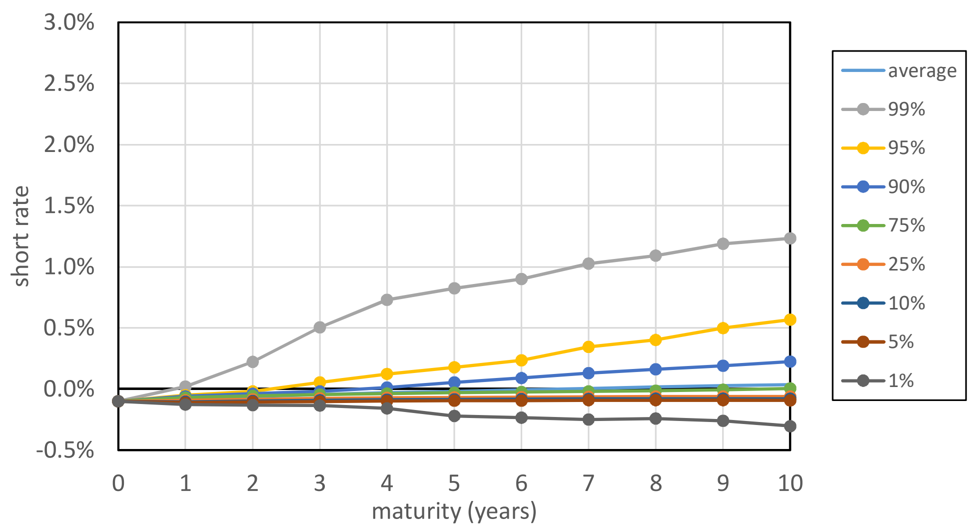

図 28: 将来の短期金利のパーセント点の時間推移（Calibrated MRSEV モデル）

使用している各レジームの平均回帰水準が 5 節よりも低いため，将来の短期金利の分布は 5 節のときよりも低金利側に集中するが，それでも 6.2 節の Calibrated 拡張 Vasicek モデルの場合よりは高金利側に裾が伸びている．それは図 29 の流動性預金残高の将来分布にも反映されて，Calibrated 拡張

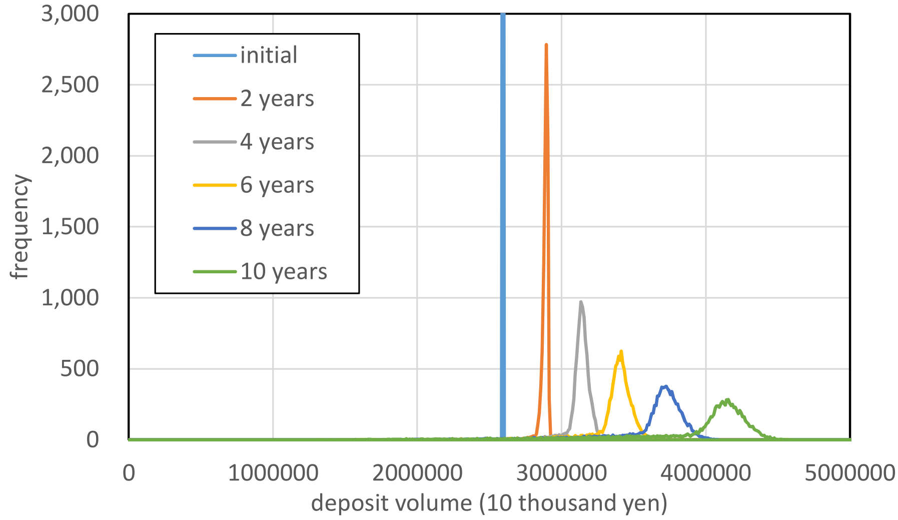

図 29: 将来の流動性預金残高の分布（Calibrated MRSEV モデル）

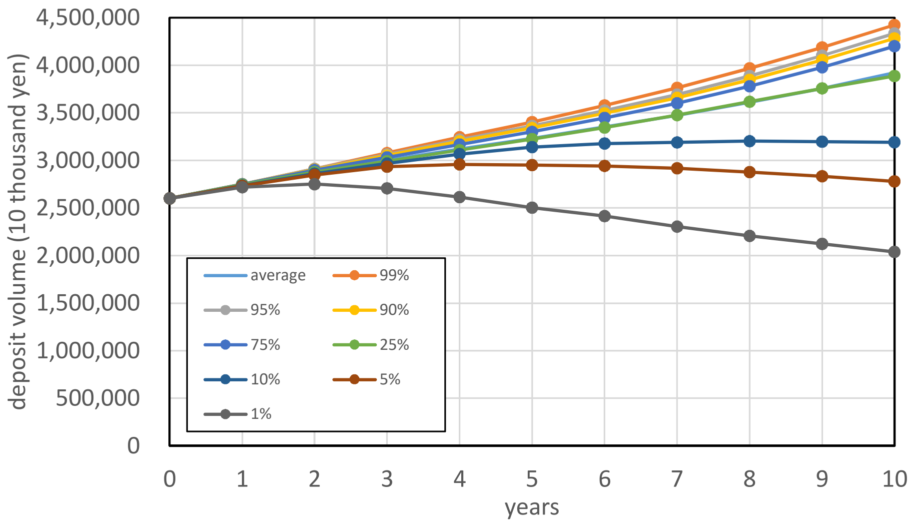

図 30: 将来の流動性預金残高のパーセント点の時間推移（Calibrated MRSEV モデル）

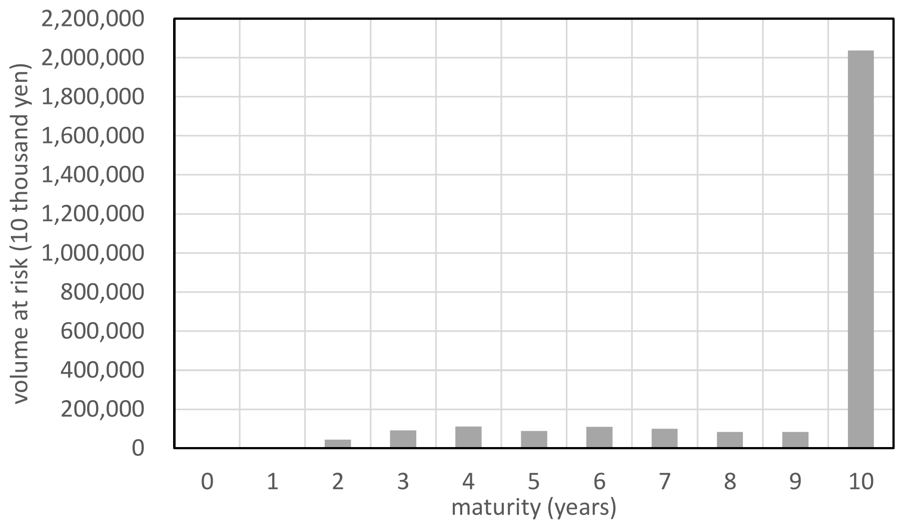

図 31: コア預金の滞留期間の分布（Calibrated MRSEV モデル）

Vasicek モデルの場合よりも分布はなだらかに広がり，図 30 によると，分布の 1% 点は 10 年間で当初の 20% 以上も低下している．この点は，Calibrated 拡張 Vasicek モデルの場合の 1% 点が 10 年後も当初の残高を越えていることと対照的である．また，平均残存期間 8.87 年は 5 節のときほどではないが，Calibrated 拡張 Vasicek モデルの場合に比べるとほぼ 1 年短い．

本節の結果によると，提案モデルは拡張 Vasicek モデルよりもコア預金のリスク管理にとって有益であるが，現在のような超低金利環境下でそのまま実務で使用することも難しい．モデルパラメータは観測データから推定することが前提であるが，現状で実務で使用するには，一部のパラメータは金融リスク管理のエキスパートの意見を踏まえた ad hoc な値を用いることも考えてはどうだろうか[11]．

7 おわりに

本稿ではレジーム遷移を考慮した確率金利モデルに基づく将来の流動性預金額推定モデル（コア預金モデル）を提案した．このモデルの基礎になる確率金利モデルは拡張 Vasicek モデル（Hull-White モデル）であるが，パラメータの値がレジームに依存するものとして，レジーム遷移過程を有限状態連続時間のマルコフ連鎖モデルで表現した．このモデルでは将来時点の金利期間構造を容易に算出できるので，さまざまな期間の金利を説明変数とした流動性預金額変動のモデリングが可能になる．また，モンテカルロシミュレーションを使って将来の短期金利シナリオを発生させて金利期間構造や流動性預金額の分布を数値的に算出するので，預金残高変化の説明変数として同時点の金利だけでなくタイムラグを考慮した金利の選択も可能であり，預金残高と金利の関係性を既存モデルに比べてより

[11] 例えば，1980-90 年代のような高金利レジームを追加設定し，非常に低い遷移確率を設ける，といった方法である．

柔軟に取り扱うことができる．

また本稿では，提案モデルの特性が明確に現れるパラメータ値のもとで預金残高の将来分布を具体的に計算し，提案モデルの特性を幾つか示した．単純な拡張 Vasicek モデルに比べると，このモデルでは将来の金利の分布がより現実的になる．具体的には，将来の短期金利は現時点の金利付近にある程度集中しながらも，低金利側には深く侵入することなく，高金利方向に長い裾を持つ分布に従うことになる．この結果は流動性預金額の将来分布にも顕著に反映されて，拡張 Vasicek モデルとは大きく異なる結果が得られる．拡張 Vasicek モデルを用いてコア預金のリスク管理に有益な結果を得るためには，観測データから推定したパラメータではなく，恣意的に高い平均回帰水準や平均回帰力を設定しなければならないが，その場合，金利が平均的な値をとる場合でもかなりの残高低下を被ることは避け難く，このような将来予測は預金残高に減少の気配が何ら見られない現時点では受け入れ難い．これに対して本稿で提案したモデルでは，平均的には現在とそれほど変わらない預金額の上昇を維持し続ける一方，金利が上昇して数年間で数 10 パーセントも残高が低下するサンプルパスもある程度の確率で現れるので，無理な設定をすることなくリスク管理に使える結果を得ることができる．

ただし，計算結果は設定したモデルパラメータの値に強く依存するので，今後はよりさまざまな側面から数値例を作成し，モデルの特性をより深く検討することが必要である．また，過去の流動性預金残高データの実証分析を行い，金利との間の関係性の検討や，金利以外の参照変数の候補の検討，預金利率のモデル化や市場金利への追随率の分析なども必要である．さらに，分析結果は流動性預金の種類・属性ごとに異なると考えられるので，流動性預金を適切な方法で分類して個々に分析を行い，最終的にはそれらを統合して評価を行うシステムの構築も必要である．今後はそれらのさまざまな分析を押し進め，その成果を論文として執筆していく予定である．

また，本稿のモデルを最近提案されているコア預金モデルの手法と結合して使用することも可能である．例えば，流動性預金を現存する預金と今後流入する預金に分割し，現存する預金に関しては適切なコーホートに分類したうえで預金寿命モデルを適用し，預金残高（この場合は流出量で考えるべきであろう）と金利との関係を本稿のようなレジームスイッチング金利モデルを用いて表現する一方，預金流入額の確率モデルを別途構築し，その全体として預金額の変動を算出する，という応用も考えられる．そのような計算ツールを用いたシミュレーションを適宜行える環境を備えることで，初めて金融機関は流動性預金のリスク管理を定量的かつ戦略的に議論できるようになると考えられる．

なお，本稿で提案したモデルは残高が金利に依存すると考えられる定期性預金のリスク管理への応用も可能であり，さらには，多くの種類の負債を統合評価するモデルへの拡張も考えられる．

謝辞

本稿の内容は株式会社エイファス主催の研究会の成果の一部である．株式会社エイファスのおお津昌三氏には共同研究の機会を与えていただいたことに厚く感謝する．また，EM アルゴリズムによるモ

デルパラメータの推定および拡張 Vasicek モデルのパラメータ推定では，株式会社エイファス塩田雅之氏と劉榕鋳氏にご助力いただいたことに厚く感謝する．最後に，日本学術振興会より科学研究費補助金基盤研究 (A) 26242028 と (B) 16H03123 の支援を受けたことに感謝する．

参考文献

[1] Basel Committee on Banking Supervision (2016), Standards – Interest rate risk in the banking book –, Bank of International Settlements.

[2] Elliotte, R. J. (1993), "New finite-dimension filters and smoothers for noisy observed Markov chains," *IEEE Transactions on Information Theory*, **39** (1), pp.265–271.

[3] Elliotte, R. J., L. Aggoun and J. Moore (1994), *Hidden Markov Models: Estimation and Control*, (Applications of Mathematics), **29** (1), Berlin: Springer.

[4] Elliotte, R. J. and L. Chan and T. K. Siu (2005), "Option pricing and Esscher transform under regime switching," *Annals of Finance*, **1**, pp.423–432.

[5] Elliotte, R. J. and T. K. Siu (2009), "On Markov-modulated exponential-affine bond price formulae," *Applied Mathematical Finance*, **16** (1), pp.1–15.

[6] Elliotte, R. J., T. K. Siu and H. Yang (2007), "Martingale representation for contingent claims with regime switching," *Communications on Stochastic Analysis*, **1**(2), pp.279–292.

[7] Jarrow, R. A. and van Deventer, D. R. (1998), "The arbitrage-free valuation and hedging of demand deposits and credit card loans," *Journal of Banking and Finance*, **22**, pp.249–272.

[8] Janosi, T., R. A. Jarrow and Y. Yildirim (2001), "Estimating default probabilities implicit in equity prices," *Working Paper*.

[9] Kijima, M. and Y. Muromachi (2000), "Evaluation of credit risk of a portfolio with stochastic interest rate and default processes," *Journal of Risk*, **3** (1), pp.5-36.

[10] O'Brien, J. M. (2000), Estimating the value and interest rate risk of interest-bearing transactions deposits, Finance and Economics Discussion Series 2000-53, Board of Governors of the Federal Reserve System, 2000.

[11] Office of Thrift Supervision (2001), "Demand Deposits," The OTS Net Portfolio Value Model, Section 6.D.

[12] RBS 証券会社東京支店 (2010), コア預金モデルと銀行 ALM について　～木島モデルと次期預金モデル～，RBS 証券会社東京支店．

[13] 石島博 (2005) レジームスイッチングモデルとファイナンス理論・実証，Waseda University, Institute of Finance, Working Paper Series WIF-05-005，早稲田大学ファイナンス総合研究所．

[14] 伊藤優，木島正明 (2007), "銀行勘定金利リスク管理のための内部モデル（AA-Kijima Model）について," 証券アナリストジャーナル, **44**, pp.79–92.

[15] 影井智弘，小柳誠 (2012), 預金者行動を考慮したコア預金モデルの構築，浜銀総合研究所．

[16] 上武治紀，枇々木規雄 (2011), "銀行の流動性預金残高と満期の推定モデル，" 日本金融・証券計量・工学学会編，バリュエーション（ジャフィー・ジャーナル –金融工学と市場計量分析–），朝倉書店，pp.196–223.

[17] クレジット・プライシング・コーポレーション (2017), IRRBB に向けた内部モデルの高度化について ～住宅ローン/コア預金モデルの解説と論点～．

[18] 小西貞則，越智義道，大森裕浩 (2008) シリーズ 予測と発見の科学 *5* 計算統計学の方法 -ブートストラップ・*EM* アルゴリズム・*MCMC*-，朝倉書店．

[19] 全国銀行協会事務局 (2016), 基準文書　銀行勘定の金利リスク（全銀協事務局仮訳案），全国銀行協会資料（[1] の邦訳）.

[20] 武田泰典 (2018), 属性別および都道府県別流動性預金残高の市場金利に対する反応，Research Report 2018 年 6 月，日興リサーチセンター.

[21] データフォアビジョン (2013), 弊社の提供するコア預金モデルについて，日本銀行金融高度化センターワークショップ「銀行勘定における金利リスク管理　ー預貸金のデュレーションの把握ー」資料.

[22] 東京三菱銀行資金証券部 (2001), "資金流動性リスク計量化の試み – 預貸金 VaR について–, *Focus on the Market*, **19.**

[23] 中川裕志 (2015) 東京大学工学教程 情報工学 機械学習，東京大学工学教程編纂委員会編，丸善出版.

[24] 日興リサーチセンター資産運用研究所 (2017), コア預金モデル　～地域金融機関の動向～，日興リサーチセンター.

[25] 枇々木規雄，岩熊淳太 (2015), 固定性預金比モデルを用いた流動性預金残高・満期の再推定，Working Paper.

[26] 平林一也 (2015), 残余アプローチによる流動性預金残高の推定モデル，首都大学東京大学院社会科学研究科修士論文.

[27] 二俣新 (2010), コア預金のモデル化についての一考察，*NFI* リサーチレビュー，2010 年 9 月号, pp.1–22.

[28] 室町幸雄編著 (2014), 金融工学の新潮流 2 「金融リスクモデリング」，朝倉書店.

[29] 室町幸雄 (2007), 金融工学の新潮流 3 「信用リスク計測と CDO の価格付け」，朝倉書店.