

Research Paper Series

No. 193

金利のレジーム遷移を考慮したコア預金額推定モデル
— コア預金のマチュリティー・ラダーの構築 —

室町 幸雄†

2018年3月

† 首都大学東京大学院社会科学部研究科

金利のレジーム遷移を考慮したコア預金額推定モデル － コア預金のマチュリティー・ラダーの構築 －

首都大学東京 大学院 社会科学研究所 室町 幸雄

2018年3月21日

概要

最近の超低金利環境下で金融機関では資産のデュレーションが長期化し、金利リスクの増大が懸念されている。一方、負債側では満期の定めのない流動性預金が高い比率を占めているが、そのうちのかなりの量は引き出されることなく長期間預金として滞留し、資産側の金利リスクの一部を相殺すると考えられている。しかし、その滞留期間特性は不明確で、現状では金利リスクの相殺効果はリスク管理上重要と考えられているものの、適切に評価できているとは言い難い。そこで本稿では流動性預金の滞留期間を算出する新しいモデルを提案する。流動性預金の残高は金利に関連して変動すると考えて、マルコフ連鎖によりレジーム遷移する確率金利モデルをもとに、流動性預金の滞留時間の分布をモンテカルロシミュレーションを用いて算出する。このモデルでは、金利デリバティブの価格付け手法を使うことで預金残高は任意の期間の金利と関連付けることができ、金利リスクのストレステストにも対応できる。数値例によると、既存の確率金利を用いた評価モデルは急激な金利上昇を仮定しないとコア預金モデルとして機能しないが、提案モデルは無理のない設定のもとでコア預金モデルとしても十分に機能する。

1 はじめに

金融機関は多くの流動性預金を負債として保有し、企業や個人への融資や有価証券への投資、プロジェクトへの投資などを行っているが、近年では国債投資や住宅ローン貸付の増大により資産側のデュレーションが長期化し、金利リスクの増大が懸念されている。一方、負債側では流動性預金額が増加傾向にあるが、それが資産側の金利リスクをどの程度相殺できるのかあまり理解されていない。このような流動性預金に関する問題は国際的な業務を行う金融機関に対するバーゼル規制でも重要視されており、銀行勘定の金利リスク（IRRBB, Interest Rate Risk in the Banking Book）の重要課題の一つとして取り上げられている [1, 13].

期限に定めがない預金は、いつでも引出可能と考えると滞留時間はほぼゼロとみなせるが、実際にはある程度の量は引き出されることなく長期間預金されたままになっている。この引き出されること

なく長期間滞留する預金はコア預金と呼ばれるが、その滞留期間についてはあまりよくわかっておらず、現時点でデフォルト・スタンダードとなる数理モデルは確立されていない。

流動性預金の金利リスク評価モデルはコア預金モデルと呼ばれており、現時点までにバーゼルの標準的手法以外にもいくつものコア預金モデルが提案されてきた。データフォアビジョン [14]、日興リサーチセンター [16]、室町 [20]などを参考にまとめ直すと、それらは (1) 過去の残高データから将来の残高を直接推定する直接推定型、(2) 金利などの説明変数と残高（被説明変数）の関係性を用いて、説明変数の将来予測から間接的に推定する間接推定型に大別され、それぞれにさまざまなモデルが存在する。例えば、(1) の直接推定型にはヒストリカル法、残高比（残高の増加率）が混合正規分布に従うとする混合正規分布モデル [15]、残高比のレジーム遷移を考慮する AA-Kijima モデル [9] などがある。(2) の間接推定型には金利参照型モデル、金利・景気参照型モデル、コンピュータを用いたモデルなどがあり、金利参照型モデルには固定性預金と流動性預金の残高比と金利の関係を考慮する固定性預金残高比変動モデルとその改良モデル [11, 10, 18, 17]、残高比が自己回帰モデルに従うとする固定性預金残高比自己回帰モデル [20]、Hull-White の確率金利モデルを用いた DFV（データフォアビジョン）モデル [14]、預金金利と市場金利の差や長短金利差との時系列的な関係を考慮する野村モデルなどがあり、金利・景気参照型モデルには CPC モデル [12] がある。他にも、預金の流入流出をモデル化する預金流入流出モデル [19]、預け入れられた時点からの預金額の流出を預金額の死亡とみなして生存解析の手法を適用する預金寿命モデル [8] があり、さらに、もともとは流動性預金の現在価値を評価するために提案された JvD モデル [5]、O'Brien モデル [6]、OTS モデル [7] など幅広い意味でコア預金モデルの一種とみなされることもある。

この中で現在の邦銀において最も標準的なのは AA-Kijima モデルであるが、金利のような残高変化に関連すると考えられる変数との関係性が考慮されていなかったため、2010 年以降は金利モデルを前提とした新たな評価モデルが提案されるようになってきた。このような動きは、流動性預金のリスクを単体で評価するのではなく、他の資産・負債とあわせて金融機関のポートフォリオ全体を評価する統合リスク評価へと繋がると考えられるので、非常に望ましい。しかしながら既存のモデルでは、過去のデータに基づいてパラメータを設定をすると流動性預金残高は上昇の一途を辿ることになってしまうため、リスク評価としてはまともに機能しない。そのため、明日から突然金利が急上昇するといった無理なトレンドを持つようにパラメータを設定しなければならず、その結果として将来の期待残高は突然減少に転じることにならざるを得ないが、そのような変化は現時点において決してもっともらしいものではない。

本稿では、このような矛盾を解消できる新たな流動性預金残高推定モデルを提案する。他の金利参照型モデルと同様に、流動性預金残高は金利の動向に影響されると考えて、モデルの基礎には確率金利モデルを使用するが、AA-Kijima モデルの特徴であるレジーム遷移過程を取り入れることで、現在のマイナス金利環境の継続性を考慮しつつ、今以上の金利低下を避けながらも将来の金利上昇を自

然に織り込める，より現実的なモデルを構築する．また，デリバティブの価格付け理論を適用することで将来の金利期間構造全体の変動を扱えるようにすることで，預金残高変化は任意の期間の金利と関連付けてモデル化できることになる．具体的な計算にはモンテカルロシミュレーションを使用するので，参照変数の採択に時間差（タイムラグ）を考慮することもできるため，モデルの柔軟性も向上する．さらに，外部から与えられた金利シナリオを反映したストレステストも適用可能になるので，他の資産・負債の金利ストレステスト結果との合算評価も可能であり，従来よりも統合的に資産・負債の金利リスクを議論できるようになる．

本稿の構成は以下である．第2節では提案モデルの前提となる知識を整理し，第3節で提案モデルの詳細を説明する．第4節では簡単な数値例で提案モデルの主な特性を示し，第5節でまとめる．

2 モデルの基礎

本節では，本稿で提案するモデルの前提となる理論について説明する．

2.1 バシチェックモデル (Vasicek Model)

時刻 $t, t \geq 0$ における瞬間的なスポットレート（短期金利とも呼ばれる）を $r(t)$ とする．将来のスポットレート $r(t)$ が観測確率 P のもとで

$$dr(t) = a(m - r(t))dt + \sigma dz(t), \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

リスク中立確率 \tilde{P} のもとで

$$dr(t) = a(\tilde{m} - r(t))dt + \sigma d\tilde{z}(t), \quad t \geq 0 \quad (2.2)$$

に従うと仮定する．ただし， a, σ は正定数， m, \tilde{m} は定数で， $z(t)$ と $\tilde{z}(t)$ はそれぞれ P と \tilde{P} のもとにおける標準ブラウン運動である．また，

$$\lambda = a \frac{m - \tilde{m}}{\sigma} \quad (2.3)$$

はリスクの市場価格と呼ばれ，ギルサノフの定理より，確率測度 P から \tilde{P} への測度変換は，十分に大きな $T > 0$ をとり，確率過程

$$Z(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(s) dz(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2(s) ds \right\} = \exp \left\{ -\lambda z(t) - \frac{\lambda^2}{2} t \right\}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.4)$$

を用いて，事象 $A \in \mathcal{F}_T$ に対して

$$\tilde{P}\{A\} = E[1_A Z(T)] \quad (2.5)$$

で与えられる。ここで \mathcal{F}_t はシステム全体の時刻 t までの情報を持つフィルトレーションで、 1_A は事象 A が真ならば 1, 偽ならば 0 になる定義関数である。

時刻 t における値 $r(t)$ が既知のとき、観測確率 P のもとでは、(2.1) より、

$$r(s) = m + (r(t) - m)e^{-a(s-t)} + \sigma \int_t^s e^{-a(s-u)} dz(u), \quad 0 \leq t \leq s \leq T, \quad (2.6)$$

となるので、

$$E_t[r(s)] = m + (r(t) - m)e^{-a(s-t)}, \quad (2.7)$$

$$V_t[r(s)] = \sigma^2 B(2a, t, s) = \sigma^2 B(2a, 0, s - t) \quad (2.8)$$

$$B(a, t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad (2.9)$$

となる。ここで、 $E_t[\cdot]$ は観測確率 P のもとにおける条件付期待値演算子、 $V_t[\cdot]$ は観測確率 P のもとにおける条件付分散演算子である。同様に、リスク中立確率 \tilde{P} のもとでは、(2.2) より、

$$r(s) = \tilde{m} + (r(t) - \tilde{m})e^{-a(s-t)} + \sigma \int_t^s e^{-a(s-u)} dz(u), \quad 0 \leq t \leq s \leq T, \quad (2.10)$$

となるので、

$$\tilde{E}_t[r(s)] = \tilde{m} + (r(t) - \tilde{m})e^{-a(s-t)}, \quad (2.11)$$

$$\tilde{V}_t[r(s)] = V_t[r(s)] = \sigma^2 B(2a, t, s) \quad (2.12)$$

となる。ここで、 $\tilde{E}_t[\cdot]$ はリスク中立確率 \tilde{P} のもとにおける条件付期待値演算子、 $\tilde{V}_t[\cdot]$ はリスク中立確率 \tilde{P} のもとにおける条件付分散演算子である。

また、満期 T の割引債の時刻 t における価格は

$$P(t, T; r(t)) = A(a, t, T) \exp\{-B(a, t, T)r(t)\} \quad (2.13)$$

$$\log A(a, t, T) = \frac{\sigma^2}{2a^2} [T - t - 2B(a, t, T) + B(2a, t, T)] - \tilde{m} [T - t - B(a, t, T)] \quad (2.14)$$

で与えられるので、(2.13) より、時刻 t における満期 T のゼロレート（割引債の最終利回り）は、

$$R(t, T) = -\frac{\log P(t, T; r(t))}{T - t} = \frac{B(a, t, T)}{T - t} r(t) - \frac{\log A(a, t, T)}{T - t} \quad (2.15)$$

と表現できる。

2.2 マルコフ局面転換モデル (Markovian Regime-Switching Model)

観測確率 P のもとで連続時間、有限状態のマルコフ連鎖モデルを考える。時刻を $t, t \geq 0$ で表し、現在を $t = 0$ とする。複数の K 個の状態（局面、レジーム） $k = 1, \dots, K$ があるものとして、時刻 t

における状態をマルコフ連鎖 $\mathbf{X}(t)$ で表現する． $\mathbf{X}(t) \in \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_K\}$ は K 次元ベクトルで，ベクトル \mathbf{e}_j の第 i 成分は $(\mathbf{e}_j)_i = \delta_{ij}$ (δ_{ij} はクロネッカーのデルタ)，つまり，第 j 成分のみ 1 でその他の成分は 0 の単位ベクトルである．Elliotte [2] や Elliotte et al. [3] によると，レジーム推移の generator を $Q(t) = (q_{ij}(t))_{i,j=1,2,\dots,K}$ ， $q_{ij}(s) = P\{X(t+s) = j | X(t) = i\}$ とすると， K 次元ベクトル $\mathbf{M}(t)$ を P -マルチンゲールとして，

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(0) + \int_0^t Q(s)\mathbf{X}(s)ds + \mathbf{M}(t), \quad t \geq 0 \quad (2.16)$$

と表現できる．同様に，リスク中立確率 \tilde{P} のもとにおける generator を $\tilde{Q}(t) = (\tilde{q}_{ij}(t))_{i,j=1,2,\dots,K}$ ， $\tilde{q}_{ij}(s) = \tilde{P}\{X(t+s) = j | X(t) = i\}$ とすると，こちらも K 次元ベクトル $\tilde{\mathbf{M}}(t)$ を \tilde{P} -マルチンゲールとして，

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(0) + \int_0^t \tilde{Q}(s)\mathbf{X}(s)ds + \tilde{\mathbf{M}}(t), \quad t \geq 0 \quad (2.17)$$

と表現できる．

金利モデルにおけるブラウン運動の場合と同様に，測度変換においては確率過程 $X(t)$ に対するリスクの市場価格を考慮する必要があり，それによって $Q(t)$ と $\tilde{Q}(t)$ の関係が記述される．

3 モデル

本節では，提案するコア預金モデルについて説明する．まず，3.1 節ではモデルの全体像を説明し，3.2 節ではその核となる確率金利モデルについて，3.3 節では将来の金利期間構造の算出について説明する．ここで使う確率金利モデルは，前節で説明したモデルを統合したマルコフ局面転換バシチェックモデル (Markovian Regime-Switching Vasicek Model, MRSVM) である．3.4 節では MRSVM のシミュレーション手法を具体的に説明し，3.5 節では預金残高と金利の関係のモデル化について触れる．

3.1 モデルの全体構成

提案するコア預金モデルでは，将来の流動性預金残高の確率分布を時系列的に作成するためにモンテカルロ・シミュレーションを使用する．実際のところ，さまざまな銀行のさまざまな種類の預金残高が金利のみに依存するとは考えられないが，ここでは金利のみに依存するものとして全体像を記述する．もちろん，他の変数，例えば株価インデックスや CPI などに依存することがデータ分析の結果として得られれば，それらの変数もモンテカルロ・シミュレーションの中に組み込めばよい．

提案モデルにおける流動性預金残高の評価を行う手順は以下である．

流動性預金残高の評価手順

1. 確率金利モデルをもとに、評価終了時点 T までの将来のシナリオ（ここでは金利のシナリオのみを想定）を、乱数を使って発生させる。乱数から直接生成するのはスポットレート（短期金利）だけであるが、金利デリバティブの価格付け理論を用いることで、その値をもとに各時点で金利期間構造が生成される。そこで、以下ではこれを金利期間構造シナリオと呼ぶことにする。
2. 流動性預金の種類ごとに、評価時点 $t_1, t_2, \dots, t_n = T$ までの金利期間構造シナリオに基づいて、残高と金利との関係性を考慮しながら預金残高の推移を計算する。
3. 評価時点 $t_1, t_2, \dots, t_n = T$ の各時点ごとに全ての流動性預金残高の総和を求める。これが流動性預金の総残高のサンプルパスになる。
4. サンプルパスが十分な数に達するまで、1-3の作業を繰り返す。
5. 評価時点 $t_1, t_2, \dots, t_n = T$ の各時点の総残高の分布をもとに、コア預金について議論する。通常行われる議論は以下である。
 - (a) 時点 $t_i, i = 1, \dots, n$ における総残高の分布から、Volume at Risk $\text{VaR}_\alpha(t_i)$ を算出する。 $\text{VaR}_\alpha(t_i)$ としては、適当な信頼水準 α ($\alpha = 0.99$ (99%) がよく使われる) を設定し、総残高の $100(1 - \alpha)$ パーセント点を求め、それを各時点の $\text{VaR}_\alpha(t_i)$ とする。
 - (b) 通常、時点が進むにつれて $\text{VaR}_\alpha(t)$ は低減していくので、その差額 $\text{VaR}_\alpha(t_i) - \text{VaR}_\alpha(t_{i+1})$ を滞留期間 t_i のコア預金額とし、差額が負になるときはゼロとする。すなわち、滞留期間 t_i のコア預金額は $\max(\text{VaR}_\alpha(t_i) - \text{VaR}_\alpha(t_{i+1}), 0)$ で表現する。ただし、 $\text{VaR}_\alpha(0)$ は現時点の総残高とする。
 - (c) コア預金額の滞留期間の分布（マチュリティー・ラダー）をもとに流動性預金全体のデデュレーションなどの金利感応度を算出し、金利リスクを評価する。

上記のうち、手順1では将来金利を発生するために確率金利モデルが必要であり、手順2では預金種類別、あるいはコーホート別に預金残高と金利との関係のモデル化が必要である。

3.2 マルコフ局面転換バシチェックモデル (Markovian Regime-Switching Vasicek Model, MRSVM)

時刻 t における瞬間的なスポットレート $r(t)$ が、観測確率 P のもとで、

$$dr(t) = a(\langle \mathbf{m}, \mathbf{X}(t) \rangle - r(t))dt + \sigma_k dz(t), \quad k = 1, \dots, K, \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

リスク中立確率 \tilde{P} のもとで、

$$dr(t) = a(\langle \tilde{\mathbf{m}}, \mathbf{X}(t) \rangle - r(t))dt + \sigma_k d\tilde{z}(t), \quad k = 1, \dots, K, \quad t \geq 0 \quad (3.2)$$

に従うとする。ただし、 a と $\sigma_k, k = 1, \dots, K$ は正定数¹、 $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_K)^\top$ と $\widetilde{\mathbf{m}} = (\widetilde{m}_1, \dots, \widetilde{m}_K)^\top$ はそれぞれ K 次元定数ベクトル、 $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$ はベクトル \mathbf{A} と \mathbf{B} の内積、 $z(t)$ と $\widetilde{z}(t)$ はそれぞれ P と \widetilde{P} のもとにおける標準ブラウン運動である。この場合の $z(t)$ に対するリスクの市場価格 $\lambda(t)$ は

$$\lambda(t) = a \frac{\langle \mathbf{m} - \widetilde{\mathbf{m}}, \mathbf{X}(t) \rangle}{\sigma} \quad (3.3)$$

となるので、 $\mathbf{X}(t)$ に依存する確率過程となる。通常の Vasicek モデルではリスクの市場価格は定数となることに注意されたい。以下では本節のモデルを MRSVM (Markovian Regime-Switching Vasicek Model) と呼ぶ。

(3.3) の $\lambda(t)$ は一般に $\mathbf{X}(t)$ に依存する確率過程であるが、モデルの複雑化とパラメータ推定の困難化を避けるため、以下を仮定する。

仮定 3.1. (3.3) で与えられる $\lambda(t)$ は時刻 t の確定関数と仮定する。

仮定 3.1 より、確率測度による平均回帰水準の差 $m_k - \widetilde{m}_k, k = 1, \dots, K$ は時刻 t に依存するが、レジームには依存しなくなる。もちろん仮定 3.1 とは異なる仮定も可能であるが、一般的にすることと使い易さにはトレードオフの関係があるので注意が必要である。

3.3 MRSVM における割引債価格

MRSVM では割引債価格を閉じた形で表現できない。その代わりとして、ここでは MRSVM における割引債価格を与える連立常微分方程式系を示す。証明は Elliotte and Siu [4] の議論において Q を $Q(t)$ に、 α_i を $\alpha_i(t)$ に置き換えることで得られるので、本稿では省略する²。

Elliotte and Siu [4] と同様の議論と証明を上述の MRSVM の設定に適用すると、時刻 t における満期 T の割引債価格は、 $r(t) = r, \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}$ として³,

$$\begin{aligned} P(t, T, r, \mathbf{X}) &= \widetilde{E} \left[\exp \left\{ - \int_t^T r(u) du \right\} \middle| r(t) = r, \mathbf{X}(t) = \mathbf{X} \right] \\ &= \exp \{ A(t, T, \mathbf{X}) - B(t, T) r \}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}, \quad (3.5)$$

であり、 $\mathbf{A}(t, T, \mathbf{X}) = (A_1, A_2, \dots, A_K)^\top$ 、 $A_i(t, T) = A(t, T, \mathbf{e}_i)$ は、境界条件

$$A_i(T, T) = 0, \quad i = 1, \dots, K \quad (3.6)$$

¹平均回帰係数 a がレジームに依存しないことで、Elliotte and Siu [4] の数式展開は比較的簡単になる。

²Elliotte and Siu [4] による Markovian regime-switching Gaussian model の議論は、generator Q と α_i が時間依存する場合にもほぼそのまま適用できる。ただし、彼らの論文中の 2 状態モデルの数式には若干誤植があるので注意されたい。

³ $\mathbf{X} \in \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_K\}$ で、 $\mathbf{X}(t)$ は常にこのうちのどれかの値をとる。

のもとにおける連立常微分方程式

$$\frac{dA_i(t, T)}{dt} - \tilde{m}_i(t)aB(t, T) + \frac{1}{2}\sigma_i^2 B^2(t, T) + e^{-A_i(t, T)} \langle \mathbf{K}, \tilde{Q}(t)\mathbf{e}_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, K \quad (3.7)$$

の解である。ただし、 $\mathbf{K} = (K_1, K_2, \dots, K_K)^\top$, $K_i = K(t, T, \mathbf{e}_i) = \exp\{A(t, T, \mathbf{e}_i)\} = e^{A_i(t, T)}$ である。(3.7)は,

$$e^{A_i(t, T)} \frac{dA_i(t, T)}{dt} + \left\{ \frac{1}{2}\sigma_i^2 B^2(t, T) - \tilde{m}_i(t)aB(t, T) \right\} e^{A_i(t, T)} + \langle \mathbf{K}, \tilde{Q}(t)\mathbf{e}_i \rangle = 0 \quad (3.8)$$

と変形できるので、 $\bar{A}_i(t, T) = \exp(A_i(t, T))$ は

$$\frac{d\bar{A}_i(t, T)}{dt} + \left\{ \frac{1}{2}\sigma_i^2 B^2(t, T) - \tilde{m}_i(t)aB(t, T) \right\} \bar{A}_i(t, T) + \sum_{j=1}^K \bar{A}_j(t, T) \tilde{q}_{ji}(t) = 0, \quad i = 1, \dots, K \quad (3.9)$$

の解でもある。(3.9)の境界条件は、(3.6)より、

$$\bar{A}_i(T, T) = 1, \quad i = 1, \dots, K \quad (3.10)$$

となる。

以上より、連立常微分方程式系(3.9)を境界条件(3.10)のもとで解けば、(3.4)–(3.5)より割引債価格が得られることになる。しかし実際には、満期 T における終端条件(3.10)を初期条件(時刻に関する境界条件)として時刻 t に関してバックワードに現在時点 $t = 0$ まで計算することになり、その場合はコルモゴロフの前向き方程式(3.9)ではなく、コルモゴロフの後向き方程式

$$\frac{d\bar{A}_i(t, T)}{dt} + \left\{ \frac{1}{2}\sigma_i^2 B^2(t, T) - \tilde{m}_i(t)aB(t, T) \right\} \bar{A}_i(t, T) + \sum_{j=1}^K \tilde{q}_{ij}(t) \bar{A}_j(t, T) = 0, \quad i = 1, \dots, K \quad (3.11)$$

を解かねばならない。境界条件(3.10)を考慮した連立常微分方程式系(3.11)はRunge-Kutta法などで数値的に解くことができ、時刻 t における満期 T のゼロレートは、

$$R(t, T, r(t), \mathbf{X}(t)) = -\frac{\log P(t, T, r(t), \mathbf{X}(t))}{T - t} \quad (3.12)$$

で与えられる。

3.4 MRSVM のシミュレーション

MRSVMで核となる確率過程は $(\mathbf{X}(t), r(t))$ であり、これらの情報をもとに時刻 t における金利期間構造が常微分方程式を解くことで求められる。

現在時点 $t = 0$ におけるレジームと短期金利の値 $(\mathbf{X}(0), r(0))$ を既知, 数値計算のタイムステップを Δt , 評価期間終了時刻を $T, T > 0$ として, 以下の手順で観測確率 P のもとにおける MRSVM のモンテカルロ・シミュレーションを行う.

MRSVM のモンテカルロ・シミュレーションの手順

1. $i = 0$ とおく.
2. $\mathbf{X}(i\Delta t)$ のゼロでない成分を第 k_i 成分, $r(i\Delta t) = r_i$, $\mathbf{Q}(i\Delta t) = (q_{j,k}(i\Delta t))_{j,k=1,\dots,K}$ とする.
3. (3.1) に従い, 標準正規乱数を使って短期金利 $r((i+1)\Delta t)$ を生成する. 具体的には, レジームを k_i , $m = m_{k_i}$, $\sigma = \sigma_{k_i}$, $r(t) = r_i$, $s - t = \Delta t$ として, (2.7)–(2.9) をもとに算出する.
4. (2.16) に従い, $(0, 1)$ 上の一様乱数を使って $\mathbf{X}((i+1)\Delta t)$ を生成する. 具体的には,
 - (a) $(0, 1)$ 上の一様乱数 U を発生する.
 - (b) $U \leq \exp(q_{k_i k_i}(i\Delta t) \cdot \Delta t)$ ならば第 k_i 成分を 1, その他の成分を 0 にする.
 - (c) $U > \exp(q_{k_i k_i}(i\Delta t) \cdot \Delta t)$ ならば

$$\epsilon = \frac{U - \exp(q_{k_i k_i}(i\Delta t) \cdot \Delta t)}{1 - \exp(q_{k_i k_i}(i\Delta t) \cdot \Delta t)}$$

を計算し,

$$\sum_{k=1, k \neq k_i}^{j-1} q_{k_i, k}(i\Delta t) < \epsilon \sum_{k \neq k_i} q_{k_i, k}(i\Delta t) \leq \sum_{k=1, k \neq k_i}^j q_{k_i, k}(i\Delta t)$$

のとき第 j 成分を 1, その他の成分を 0 にする. ここで, $q_{k_i k_i}(i\Delta t) < 0$ である.

5. $(i+1)\Delta t < T$ ならば $i = i+1$ とおき, 手順 2 に戻る. $(i+1)\Delta t = T$ ならば手順 6 に進む.
6. シナリオ数が十分に得られたら, 終了する. 十分になければ手順 1 に戻る.

手順 4 で遷移強度に応じたレジーム遷移を行っている. 流動性預金残高の評価のために将来時刻 t における金利期間構造, 例えば, 瞬間的な短期金利 $r(t)$ ではなく, 時刻 t における期間 τ の金利 $R(t, t + \tau)$ (ゼロレートを想定) が必要になる場合は, $(\mathbf{X}(t), r(t))$ をもとに 3.3 節の議論を用いて $R(t, t + \tau; \mathbf{X}(t), r(t))$ を算出する. 具体的には,

$$\bar{A}_i(t + \tau, t + \tau) = 1 \tag{3.13}$$

を境界条件として (3.11) を解き, (3.4) の割引債価格 $P(t, t + \tau, r(t), \mathbf{X}(t))$ を求め,

$$R(t, t + \tau; \mathbf{X}(t), r(t)) = -\frac{\log P(t, t + \tau, r(t), \mathbf{X}(t))}{\tau} \tag{3.14}$$

とすればよい.

本項で示したモンテカルロシミュレーションでは観測確率 P のもとで将来シナリオを生成している。一方、手順の後に記した金利期間構造の算出では、金利を原資産とする割引債の価格付けをしているので、リスク中立確率 \tilde{P} を用いている。このように、本稿で提案するモデルでは観測確率 P とリスク中立確率 \tilde{P} の両方が使われている。将来価値ベースによるリスク評価を行う場合は理論的にこのようになるケースが多いが、その詳細に関しては室町 [21] を参照されたい。

3.5 預金残高のモデル化

実際の分析では、流動性預金を預金種類、利率の種類、一口当たりの規模、預金者属性などをもとに分類し、それぞれの過去データをもとに預金残高（あるいはその増減率）と金利との関係性をモデル化する。本稿のモデルでは確率的なスポットレートモデルを用いたことで金利期間構造を扱えるため、預金残高（あるいはその増減率）とさまざまな期間の金利との関係を扱うことができる。また、将来の残高の推移をモンテカルロシミュレーションで算出するため、預金残高と金利の同時的な関係だけでなく、例えば1ヶ月前の金利との関係を考えるといったタイムラグを取り入れたモデルを構築することも可能である。

4 数値例

本節では提案モデルによる簡単な数値例を示す。MRSVM に関してはモデルパラメータを仮定し、さらに預金残高の増減率と金利の間に単純な関係式を仮定して、コア預金の滞留期間の分布（マチュリティ・ラダー）を算出し、平均滞留期間を算出する。流動性預金の金利リスクを評価するにはさらに預金金利の議論も必要であるが、本稿では割愛する。

4.1 金利モデルの設定

超低金利、低金利、高金利の3レジームを考えて、表2のようにパラメータを設定する。

表 1: 3つのレジームのモデルパラメータ

regime k	a	m_k	σ_k
1	0.3	0.0 %	0.2 %
2	0.3	2.0 %	1.0 %
3	0.3	5.0 %	1.5 %

初期条件は $X(0) = 1$ (超低金利状態) で $r(0) = 0.0\%$ とし, レジーム推移の generator は

$$Q = \begin{pmatrix} -0.25 & 0.20 & 0.05 \\ 0.05 & -0.25 & 0.20 \\ 0.05 & 0.20 & -0.25 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} -0.40 & 0.35 & 0.05 \\ 0.05 & -0.35 & 0.30 \\ 0.02 & 0.38 & -0.40 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

で与える. 数値計算のタイムステップは $\Delta t = 0.01$ year, シミュレーション回数は 10,000 とする.

比較のため, 本稿ではレジーム遷移を考慮しない Vasicek モデルの結果も併記する. この Vasicek モデルのパラメータは, $a = 0.3$, $m = 0.03$ (3.0%), $\sigma = 0.01$ (年率 1.0%) とする.

4.2 流動性預金残高モデルの設定

ここではデータフォアビジョン [14] の DFV 標準流動性預金モデルに記載されている金利と残高増加率の関係式を借用する⁴. 時刻 t における流動性預金残高を $L(t)$ とし, 前月比を $R_L(t + \Delta t) \equiv L(t + \Delta t)/L(t)$, $\Delta t = 1/12$ (1ヶ月) としてデータフォアビジョン [14] を流用すると,

$$R_{L_1}(t) = \frac{L_1(t + \Delta t)}{L_1(t)} = 1.00904 - 0.00769\sqrt{R(t, t + \Delta t_1)(\%)}, \quad \text{個人流動性預金} \quad (4.2)$$

$$R_{L_2}(t) = \frac{L_2(t + \Delta t)}{L_2(t)} = 1.01008 - 0.01988\sqrt{R(t, t + \Delta t_2)(\%)}, \quad \text{法人流動性預金} \quad (4.3)$$

であり, 総流動性預金残高は $L(t) = L_1(t) + L_2(t)$ で表される. ここでは初期値を $L_1(0) = 1.6 \times 10^6$ 万円, $L_2(0) = 1.0 \times 10^6$ 万円とし, $\Delta t_1 = 1/12$ (1ヶ月金利), $\Delta t_2 = 1$ (1年金利) を使う. 1ヶ月金利と1年金利は時刻 t における割引債価格の期間構造から求める. なお, $R(t, t + \Delta t_1)$ や $R(t, t + \Delta t_2)$ が負値をとるときは 0 とした.

本稿で提案したモデルでは, 任意の時点で金利期間構造を算出できるので, 他のさまざまな期間の金利を組み合わせた関係式を用いること, 例えば, 1年金利と10年金利の差なども説明変数として使用できる. また, モンテカルロシミュレーションを用いるので, タイムラグのある金利と残高増減率の関係式を用いてもよい. このようにモデルの自由度は高くなる一方で, 使える変数が増えるために分析の作業負荷は増大する. このモデル構築に機械学習の手法を適用するのも一案であろう.

4.3 将来の短期金利の分布と金利期間構造

図 1 に Vasicek モデルによる将来の瞬間的な短期金利 $r(t)$ の将来 (1, 2, 3, 4, 5 年後) の分布を示す. Vasicek モデルでは将来の短期金利は正規分布に従うので, 分布は広がりながら平均回帰水準 3.0% を中心とする方向にシフトしていく. 図 2 にはパーセント点の時間推移を示す. 分布の広がりには 5-6 年後にはほぼ安定し, あとは全体的に少しずつプラス方向にシフトしていくようである.

Distributions of Short Rates (Vasicek Model)

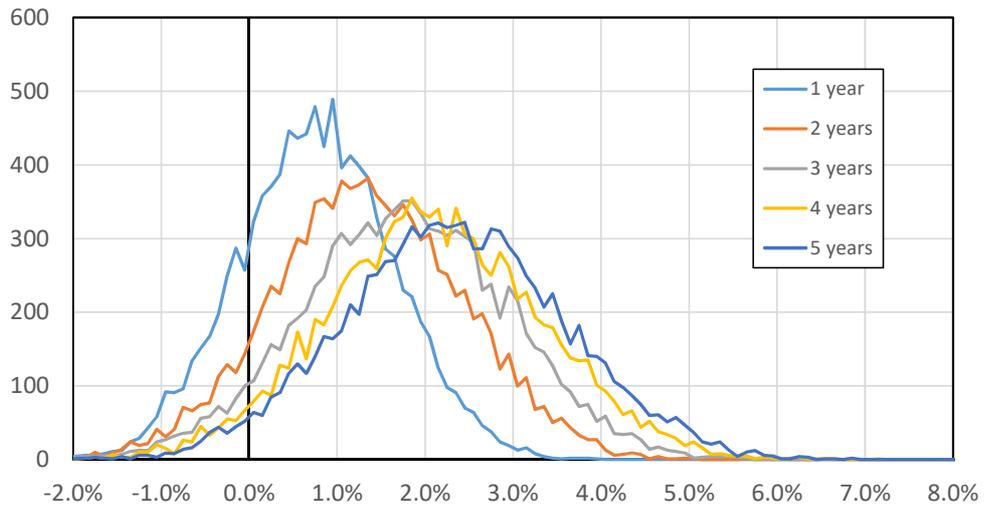


図 1: 将来の短期金利の分布 (Vasicek モデル)

Percentiles of Short Rates (Vasicek Model)

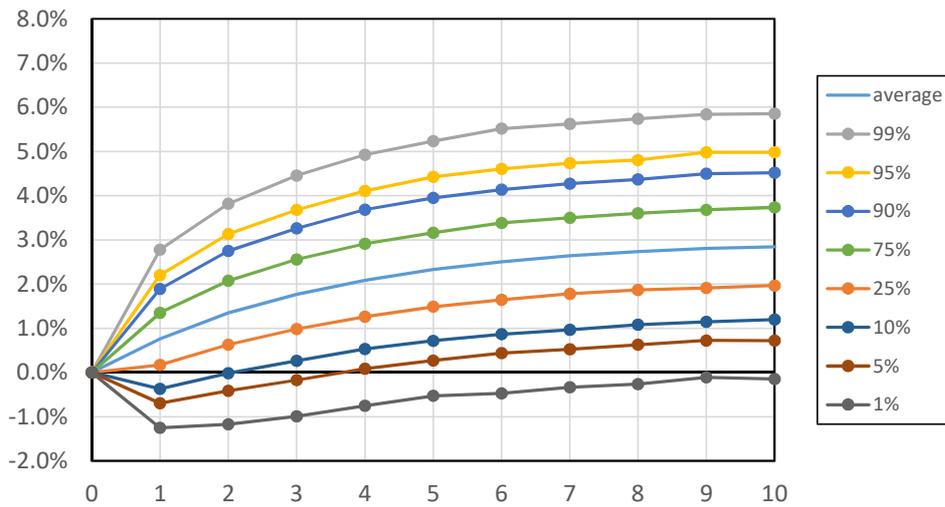


図 2: 将来の短期金利の分布 : パーセント点の時間推移 (Vasicek モデル)

次に、本稿で提案した MRSVM による将来の瞬時的な短期金利 $r(t)$ の将来（1, 2, 3, 4, 5 年後）の分布を図 3 に示す。このモデルでは、当初は初期値 $r(0) = 0$ 付近に鋭いピークを持ち、左裾に比べて右裾の方がやや厚い分布になる。時間が進むとともに、初期値近傍のピークは急速に低くなるがその場で広がることはない。また、時間が進んでも左裾はあまり変わらないが、右裾は次第に厚くなり、裾野も広がっていく。左側の分布の裾は厚くならないのは、初期値よりも金利が低い側には別のレジームが存在しないこと、そして超低金利レジームのボラティリティが $\sigma_1 = 0.2\%$ と小さいことによる。一方、金利が高い側には別のレジームが存在し、それらのレジームのボラティリティが相対的に高いため、右側の分布の裾は時間とともに長く伸び、厚くなっていく。

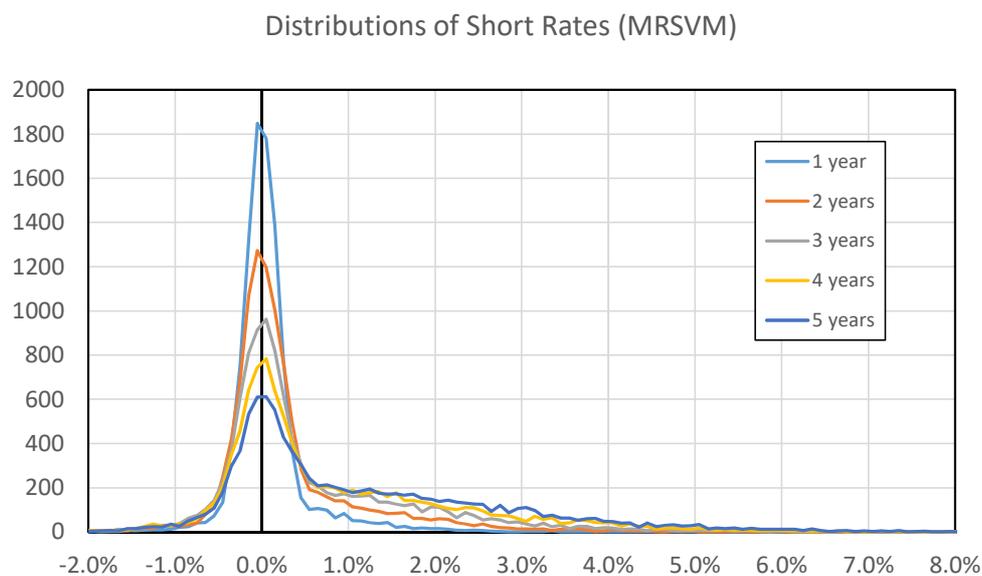


図 3: 将来の短期金利の分布 (MRSVM)

図 4 は MRSVM によるパーセント点の時間推移を描いた図で、前述の結果を顕著に示している。1%点や5%点、10%点までは時間が推移してもあまり変動せず、それぞれ -1.0% や 0% 近傍に長く留まるが、平均値 (average) や 75%点以上のパーセント点は時間とともに上昇していく。この上昇は特に右裾ほど顕著に見られる。図 3 からわかるが、このシミュレーションによって描かれる将来の短期金利の分布は、時間とともに右裾に長く伸びた非常に非対称性の強い分布であり、この特徴は時間の経過とともに顕著になっていく。分布の非対称性は、短期金利の平均値 (average) が当初 2 年間は 75%点とほぼ同じ水準に留まることにも現れている。

図 5 および図 6 は、Vasicek モデルと MRSVM におけるあるサンプルパスの 1 年毎の金利期間構造の推移を示したものである。これらの図で、横軸の 1 年から 10 年にかけて伸びている水色のカーブ

⁴データフォアビジョン [14] では金利期間構造を扱わないので短期金利と残高増加率の関係式であるが、ここではある期間の金利との関係式として扱うことにする。

Percentiles of Short Rates (MRSVM)

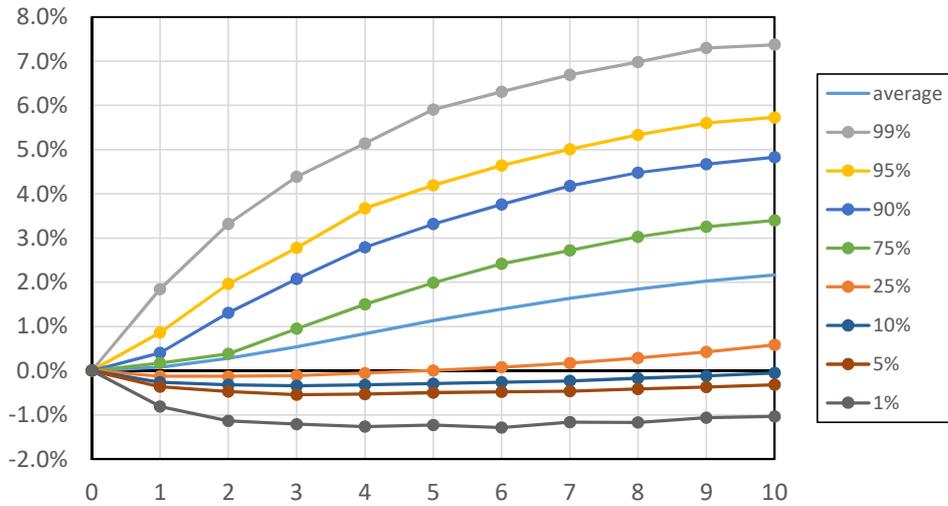


図 4: 将来の短期金利の分布：パーセント点の時間推移（MRSVM）

は1年後の期間0年から9年までのゼロレートカーブ，横軸の2年から10年にかけて伸びている橙色のカーブは2年後の期間0年から8年までのゼロレートカーブであり，他のカーブも同様である．これらの将来時点 t における金利期間構造は，モンテカルロシミュレーションで発生させたあるサンプルパスの時刻 t における $(X(t), r(t))$ を初期状態として，3.3節で述べた常微分方程式系 (3.11) をそれぞれの満期 T における境界条件 (3.10) のもとで数値的に解いて求めた割引債価格 $P(t, T)$ から求めたゼロレートを繋いだものである．このサンプルパスでは，2年後にレジーム2（中金利状態）に遷移してからしばらくそのまま留まり，8年目にレジーム3（高金利状態）に遷移したのち，再びレジーム2やレジーム1（超低金利状態）へと遷移する．4年目以降の金利期間構造にはレジーム2の金利パラメータが反映されて，3年までの期間構造よりも1-2%程度上昇している．さらにその後も金利は高止まりするが，最後にレジーム2やレジーム1への推移を反映して金利が低下していく．

4.4 預金残高の分布の時間変化

図7と図8は，それぞれ Vasicek モデルと MRSVM による流動性預金残高分布のパーセント点の時間推移を示したものである．

まず，Vasicek モデルによる結果である図7について検討する．Vasicek モデルでは将来の短期金利は左右対称に広がる正規分布に従うが，将来的にマイナス金利に深く進んでいくことは実現可能性が極めて低いと考えると，それを避けるためには今の計算で用いた設定のように正方向に強くシフトさせざるを得ない．ここで平均金利が辿るサンプルパスを考えると，将来の平均金利は緩やかに上昇す

Evolution of Term Structure of Zero Rates (Vasicek Model)

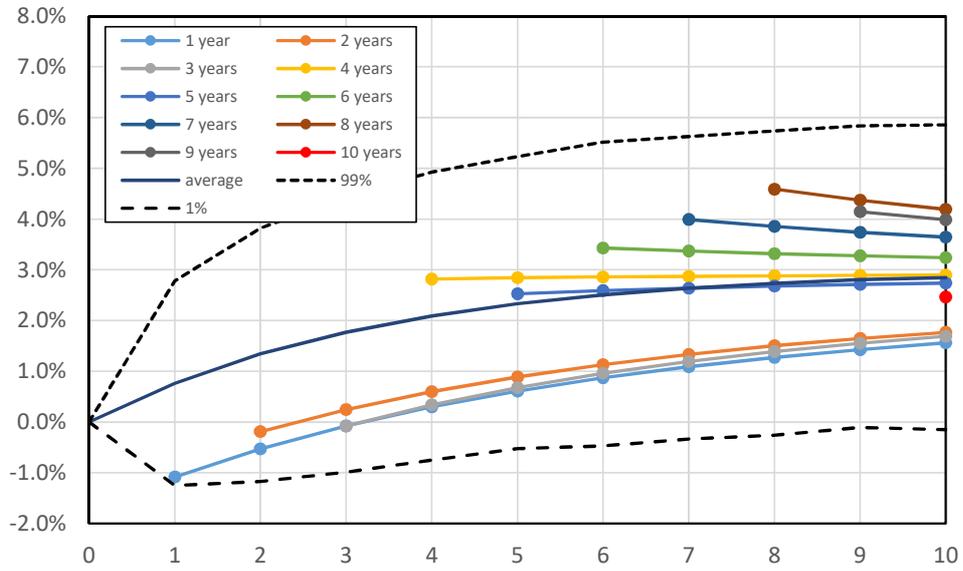


図 5: 将来の金利期間構造の推移の例 (Vasicek モデル)

Evolution of Term Structure of Zero Rates (MRSVM)

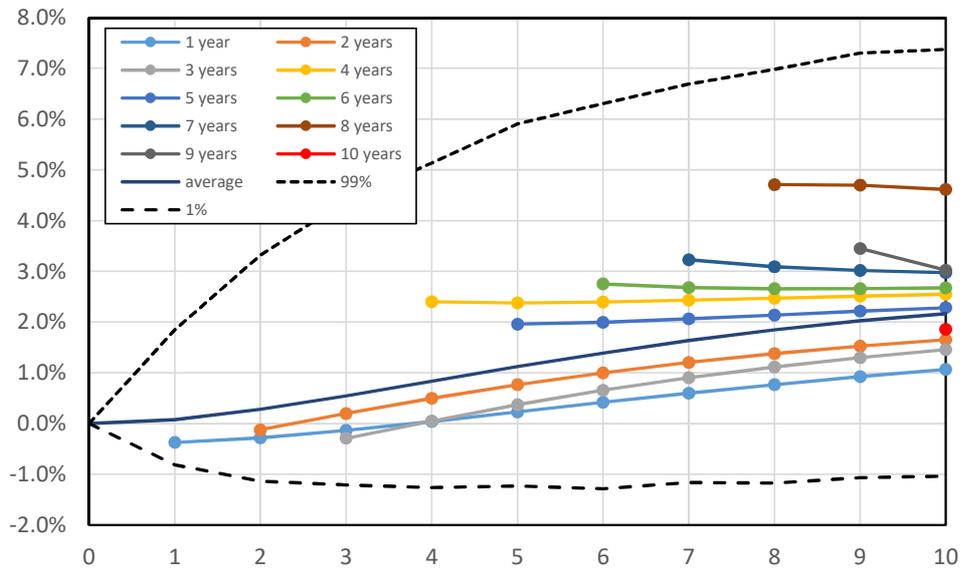


図 6: 将来の金利期間構造の推移の例 (MRSVM)

ることになるので、預金残高は当初のみ増加するが、間もなく減少傾向に入り、そのまま低下し続ける。もちろん低金利にとどまるサンプルパスも存在するが、その確率は時間が経つほど低くなり、結果として流動性預金残高が上昇する確率はそれほど高まることはない。このため、将来の流動性残高は全体として低下傾向になり、残高が上昇する確率は限定される。ここで特筆すべきは、平均的な金利パスを想定したときでも流動性預金残高は間もなく減少に転じ、数年後にはかなりの割合が流出する、という結果が得られることである。このような結論は、少なくとも残高に顕著な減少傾向が全く見られない現時点において果たして妥当な予想と言えるであろうか、大いに疑問である。

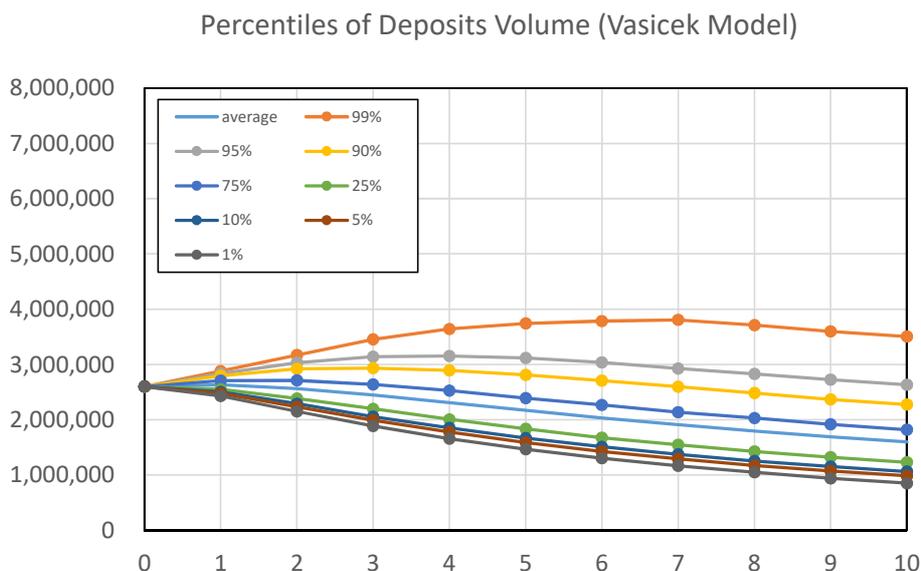


図 7: 将来の流動性預金残高の分布：パーセント点の時間推移（Vasicek モデル）

図 8 は、将来の短期金利は時間が経過してもマイナス金利に深く入り込んでいく確率は極めて低く、一方で初期値（0%）近傍には分布のピークがかなりの時間残るため、流動性預金残高が将来上昇する確率はあまり低くならない。平均金利がゆるサンプルパスを考えると、将来的に金利は上昇するものの変化は緩やかなので、この数値例では7年目まで残高は上昇を続け、減少に転じた7年後以降の変化も極めて緩やかで、ほとんど変化しないくらいである。この結果は、少なくとも残高に顕著な減少傾向が全く見られない現時点では受け入れやすい予想である。将来金利が平均パスよりも低い領域に留まる場合は、この平均的な残高推移以上の結果になるので、かなりの確率で将来の残高は増加することになる。一方、将来金利の分布の裾は Vasicek モデルの場合をはるかに上回る領域にまで広く伸びているので、将来の残高が減少する確率もある程度以上存在することになり、その減少量も大きい。以上より、MRSVM による将来の流動性預金残高は Vasicek モデルに比べて幅広い分布となり、平均的には現状とそれほど変わらない残高で推移すると予測しながらも、数年間で倍増する確率も、数年間で半減する確率もともに少なからず存在する。

Percentiles of Deposits Volume (MRSVM)

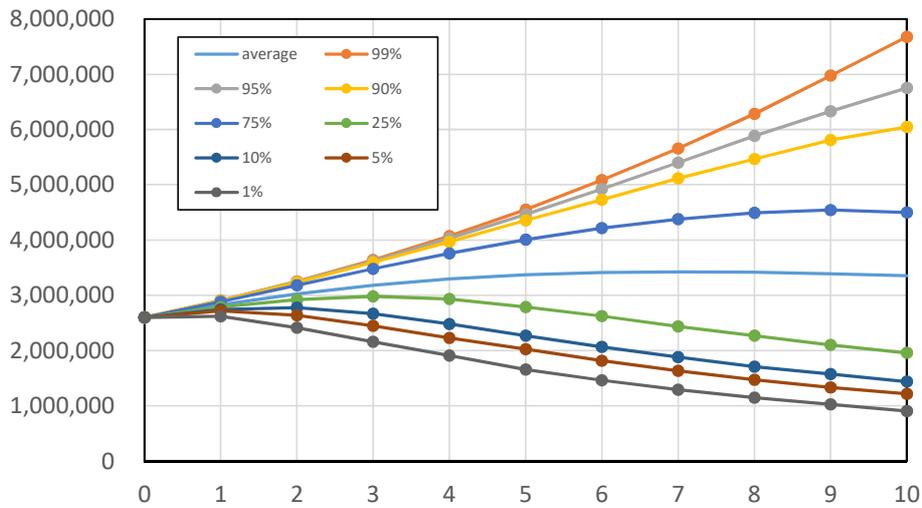


図 8: 将来の流動性預金残高の分布：パーセント点の時間推移（MRSVM）

もちろん，以上の結果はこの数値計算で用いたパラメータの値に強く依存するので，今後はより詳細な数値実験によるモデルの特性分析が必要である。

4.5 コア預金の滞留期間の分布

前項までの結果をもとに，Vasicek モデルと MRSVM のそれぞれから得られるコア預金の滞留時間の分布を表 2 に示す。ただし， $VaR_{0.99}(t_i) - VaR_{0.99}(t_{i+1}) < 0$ のときは 0 としたが，表 2 でこれに該当するのは MRSVM の期間 0 年のコア預金額のみである。また，表 2 には分布から得られる平均滞留期間も示している。この計算結果では Vasicek モデルに比べて平均滞留期間は少し長い程度に過ぎないが，これらのモデルで使用したパラメータ値はモデルの特性を示すために使用した値に過ぎないので，詳しく比較しても明確な意味は見い出せない。

表 2: コア預金の滞留期間の分布 (単位： $\times 10^5$ 万円)

	滞留期間 (年)											平均滞留期間 (年)
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Vasicek	1.70	2.81	2.64	2.26	1.90	1.64	1.38	1.19	1.09	0.90	8.50	5.73
MRSVM	0	2.05	2.56	2.51	2.47	1.98	1.68	1.46	1.20	1.20	9.06	6.33

なお，図 9 と図 10 に，それぞれのモデルによるコア預金の滞留期間の分布を図示する。

Maturity Distribution of Core Deposits (Vasicek Model)

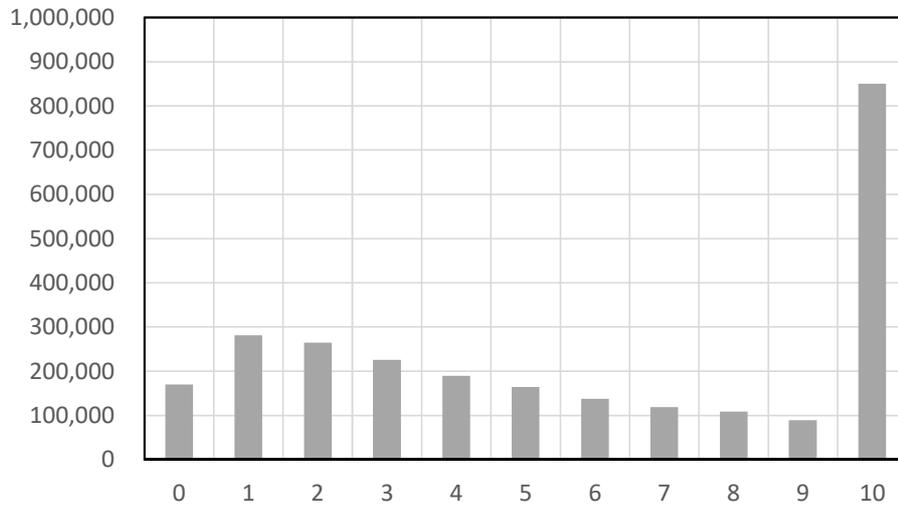


図 9: コア預金の滞留期間の分布 (Vasicek モデル)

Maturity Distribution of Core Deposits (MRSVM)

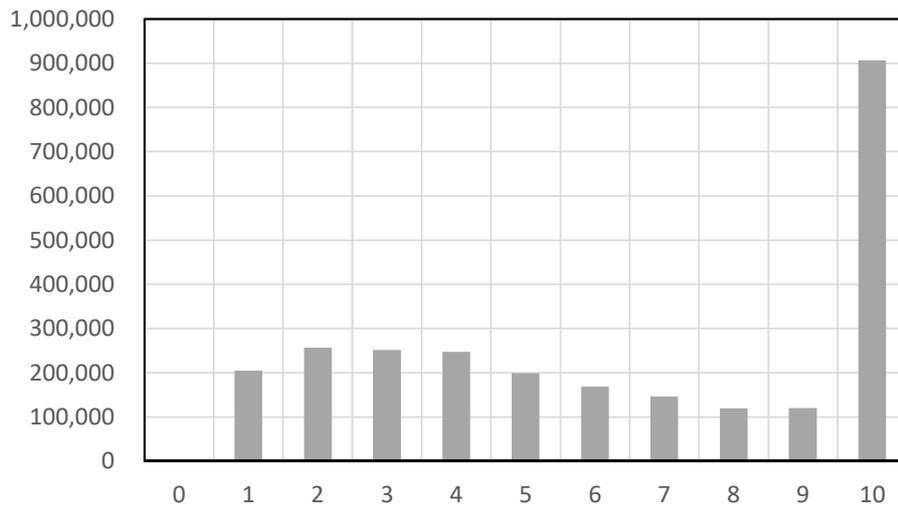


図 10: コア預金の滞留期間の分布 (MRSVM)

5 おわりに

本稿ではレジーム遷移を考慮した確率金利モデルに基づく将来の流動性預金額推定モデル（コア預金モデル）を提案した。このモデルの基礎になる確率金利モデルは Vasicek モデルであるが、パラメータの値がレジームに依存するものとして、レジーム遷移過程を有限状態連続時間のマルコフ連鎖モデルで表現している。この金利モデルでは割引債価格を与える連立常微分方程式系を数値的に解くことで将来時点の金利期間構造が明示的に得られるので、さまざまな期間の金利を説明変数として流動性預金額（またはその増加率）をモデル化することが可能である。また、モンテカルロシミュレーションを使って将来の短期金利シナリオを発生させて金利期間構造や流動性預金額の分布を数値的に算出するので、預金残高変化の説明変数として同時点の金利だけでなくタイムラグを考慮した金利の選択も可能である。

さらに本稿では、預金残高の将来分布だけでなく、コア預金の滞留期間分布の算出までを数値例で示し、モデルの特性を具体的に示した。単純な Vasicek モデルに比べると、このモデルでは将来の金利の分布がより現実的になる。具体的には、将来の金利は現時点の金利付近にある程度集中しながらも、マイナス金利に深く突入することなく、かつ高金利方向に長く厚い裾を伸ばした分布に従う。この結果は流動性預金額の将来分布にも顕著に反映されて、Vasicek モデルとは大きく異なる結果が導かれる。Vasicek モデルを用いてコア預金のリスク管理に使える結果を得るためには、金利が平均的な値を辿る場合でもかなりの残高低下を被ることは避け難いが、このような予測は将来の預金残高減少の気配が何ら見られない現時点では受け入れ難い。これに対して本稿で提案したモデルでは、金利のサンプルパスが平均的な値を辿る場合、現在とそれほど変わらない預金額を維持し続けられるが、金利が上昇するサンプルパスでは数年間で数 10 パーセントも残高を減らすことがあるという、リスク管理に使える結果が得られる。これらは現状において受け入れやすい結果であると考えられる。

ただし、上述の数値例による結果は設定したモデルパラメータ値に強く依存するので、今後はよりさまざまな側面から数値例を作成して、モデルの特性をより深く検討する必要がある。また、現実の観測データから適切なモデルパラメータ値をカリブレーションする安定的な方法を提案することや、実証分析により、金利以外の参照変数を取り込むことで説明力を向上させる試みも必要である。もちろん、実際にコア預金の金利リスクを算出するには、さらに流動性預金の種類別・属性別の分析、預金利率のモデル化なども必要である。

ここで提案したモデルは流動性預金のリスク管理への利用を想定しているが、今後は残高が金利に依存すると考えられる定期性預金などのリスク評価への活用も検討することで、将来的には多くの種類の負債を統合評価できるモデルへの拡張も可能であろう。

参考文献

- [1] Basel Committee on Banking Supervision (2016), Standards – Interest rate risk in the banking book –, Bank of International Settlements.
- [2] Elliotte, R. J. (1993), “New finite-dimension filters and smoothers for noisy observed Markov chains,” *IEEE Transactions on Information Theory*, **39** (1), pp.265–271.
- [3] Elliotte, R. J., L. Aggoun and J. Moore (1994), *Hidden Markov Models: Estimation and Control*, (Applications of Mathematics), **29** (1), Berlin: Springer.
- [4] Elliotte, R. J. and T. K. Siu (2009), “On Markov-modulated exponential-affine bond price formulae,” *Applied Mathematical Finance*, **16** (1), pp.1–15.
- [5] Jarrow, R. A. and van Deventer, D. R. (1998), “The arbitrage-free valuation and hedging of demand deposits and credit card loans,” *Journal of Banking and Finance*, **22**, pp.249–272.
- [6] O’Brien, J. M. (2000), Estimating the value and interest rate risk of interest-bearing transactions deposits, Finance and Economics Discussion Series 2000-53, Board of Governors of the Federal Reserve System, 2000.
- [7] Office of Thrift Supervision (2001), “Demand Deposits,” The OTS Net Portfolio Value Model, Section 6.D.
- [8] RBS 証券会社東京支店 (2010), コア預金モデルと銀行 ALM について ～木島モデルと次期預金モデル～, RBS 証券会社東京支店.
- [9] 伊藤優, 木島正明 (2007), “銀行勘定金利リスク管理のための内部モデル (AA-Kijima Model) について,” 証券アナリストジャーナル, **44**, pp.79–92.
- [10] 影井智弘, 小柳誠 (2012), 預金者行動を考慮したコア預金モデルの構築, 浜銀総合研究所.
- [11] 上武治紀, 枇々木規雄 (2011), “銀行の流動性預金残高と満期の推定モデル,” 日本金融・証券計量・工学学会編, バリュエーション (ジャフィー・ジャーナル –金融工学と市場計量分析–), 朝倉書店, pp.196–223.
- [12] クレジット・プライシング・コーポレーション (2017), IRRBB に向けた内部モデルの高度化について ～住宅ローン/コア預金モデルの解説と論点～.
- [13] 全国銀行協会事務局 (2016), 基準文書 銀行勘定の金利リスク (全銀協事務局仮訳案), 全国銀行協会資料 ([1] の邦訳).
- [14] データフォアビジョン (2013), 弊社の提供するコア預金モデルについて, 日本銀行金融高度化センターワークショップ「銀行勘定における金利リスク管理 –預貸金のデュレーションの把握–」資料.
- [15] 東京三菱銀行資金証券部 (2001), “資金流動性リスク計量化の試み – 預貸金 VaR について–, *Focus on the Market*, **19**.
- [16] 日興リサーチセンター資産運用研究所 (2017), コア預金モデル ～地域金融機関の動向～, 日興リサーチセンター.
- [17] 枇々木規雄, 岩熊淳太 (2015), 固定性預金比モデルを用いた流動性預金残高・満期の再推定, Working Paper.
- [18] 平林一也 (2015), 残余アプローチによる流動性預金残高の推定モデル, 首都大学東京大学院社会科学部研究科修士論文.
- [19] 二俣新 (2010), コア預金のモデル化についての一考察, *NFI* リサーチレビュー, 2010年9月号, pp.1–22.
- [20] 室町幸雄編著 (2014), 金融工学の新潮流 2 「金融リスクモデリング」, 朝倉書店.
- [21] 室町幸雄 (2007), 金融工学の新潮流 3 「信用リスク計測と CDO の価格付け」, 朝倉書店.