

Research Paper Series

No. 154

プリペイメント率と金利の長期的な変動特性を考慮した RMBS の価格付け

黄文峰 †、岸田則生 ‡、室町幸雄 §

2015 年 10 月

† 株式会社 AFG 統計・金融先端テクノロジー本部

‡ 株式会社 AFG 統計・金融先端テクノロジー本部

§ 首都大学東京社会科学部研究科経営学専攻

プリペイメント率と金利の長期的な変動特性を 考慮した RMBS の価格付け

黄 文峰* 岸田 則生† 室町 幸雄‡

2015 年 10 月

概要

本稿ではプリペイメントとその金利依存性を考慮した RMBS の解析的な価格評価について議論する。最近、非負確率金利モデルを用いてプリペイメント率とその金利依存性の期間構造を価格に反映できるモデルが提案され、解析的な価格式が導出されたが、RMBS の特徴であるネガティブ・コンベキシティの形状はやや現実と乖離していた。そこで本稿では改善案としてプリペイメント率の非負化を試みたところ、ネガティブ・コンベキシティの形状はより現実的になった。さらに、プリペイメント率モデルのパラメータを観測データから推定する方法を提案し、具体的に推定を行い、その結果を用いてモデル選択の価格への影響を評価した。また、金利モデルを区間分割してみると、わずかな分割でカリブレーション結果は格段に向上した。これらの結果、プリペイメント率と金利の長期的な変動特性を反映できる価格付けモデルが得られた。

キーワード：RMBS(住宅ローン債権担保証券)、非負プリペイメント率モデル、プリペイメント率の金利依存性、ベースラインプリペイメント率、区間分割 Quadratic Gaussian++ モデル

1 はじめに

RMBS（住宅ローン債権担保証券）とは住宅ローン債権から構成されるポートフォリオを裏付資産として発行される証券化商品で、ABS（資産担保証券）の一種である。世界金融危機以降、国内外ともに証券化商品市場はひどく低迷してきたが、最近では復活の兆しが見え始めている。日本証券業協会・全国銀行協会（2014）によると、国内の RMBS 発行額はここ数年安定的に推移しており、2013 年度には国内証券化商品発行額の約 74% を占め、その 75% は住宅金融支援機構が発行する債券であった。RMBS に対する信頼は厚く、住宅金融支援機構債券や住宅金融公庫債券は国内格付機関から AAA の評価を得ており、RMBS は金融機関にとって長期投資の一端を担う金融商品となっている。一方で商品特性をみると、国債などの普通の債券とは異なり、RMBS には住宅ローン債務者によるプリペイメント（期限前償還）およびデフォルト（債務不履行）という不確定要因が存在

* 株式会社 AFG 統計・金融先端テクノロジー本部 E-mail: wfhuang@afginc.co.jp

† 株式会社 AFG 統計・金融先端テクノロジー本部 E-mail: nkishida@afginc.co.jp

‡ 首都大学東京大学院社会科学部研究科 E-mail: muromachi-yukio@tmu.ac.jp

し、しかもその発生比率は経済環境の影響を受けるため、通常の債券と同様に扱うことは望ましくない。

これまで RMBS に関して行われてきた多くの学術的・実務的な研究は、1) プリペイメント率のデータ分析及びモデル化と、2) プリペイメントリスク（およびデフォルトリスク）を考慮した RMBS の価格付け及びリスク評価、に分類できる。1) では、観測データに基づくプリペイメント率モデルが幾つか提案されている。実務では PSA モデルやその日本版である PSJ モデル（例えば、日本証券業協会（2006）を参照）のようにプリペイメント率を経過期間の確定的な関数（具体的には区分的一次関数）で与える単純なモデルが有名であるが、他にもさまざまなモデルが提案されている。2) は、モンテカルロ法・格子法・偏微分方程式などコンピュータを駆使した数値計算により精緻な価格を求める研究と、単純化を行うことで価格の解析解^{*1}を求める研究に分けられる。この分野で解析解の価格が必要とされるのは、RMBS は通常の債券に比べて満期が長く、利払が頻繁であることから、特に、多様な経済環境下で価格計算を繰り返すことが要求されるリスク管理の分野において計算時間の短縮化が望まれてきたためである^{*2}。

本研究は RMBS 価格の解析解を求める分野に属している。この分野の先駆けとなる Collin-Dufresne and Harding(1999) は、短期金利に Vasicek モデルを仮定し、プリペイメント率を短期金利の一次関数で表現して、連続的な元利金払を行う RMBS の解析的な価格を導出した。Kolbe(2007) はプリペイメント率を CIR 過程に従う金利の一次関数で表現し、さらに金利にキャップとフロアーを設けたモデルを考案し、RMBS 価格の近似式を導出した。Rom-Poulsen(2007) は金利とプリペイメント率を多変量 Affine モデルや多変量 Quadratic Gaussian モデルで表現して、RMBS 価格が満たす連立常微分方程式を数値的に解いて価格を求めた。山崎 (2005) はさまざまなプリペイメント率モデルによる RMBS の価格付けについてまとめ、特に、プリペイメント率の独自の期間構造と金利依存性の両方に着目したモデルについて広く言及した。

この分野の既存研究ではプリペイメント率は金利の一次関数として表現されることが多いが、それは両者の関係をおよそ表現できて、かつ解析解を導出できる可能性があるからである。実際のプリペイメント率のデータをみると、金利が低くなるほどプリペイメント率が上昇する傾向は認められるものの、時期による変動はかなり大きい。しかも日本はここ 10 年以上超低金利状態が続き、さまざまな環境下のデータが豊富に得られているわけでもない。そのため、プリペイメント率の金利依存性をどのような関数で表現するのが適切かは必ずしも明確でない。シミュレーションでは新生証券 (2009) などのようにプリペイメント率が負にならないという特性を持つ比例ハザードモデルも使われるが、金利に対して指数的に変化する点には違和感も持たれている。

最近、岸田ら (2013) は将来の短期金利が負値にならず、しかも現在の金利期間構造と整合的になる CIR++ モデルと Quadratic Gaussian++ (QG++) モデルの 2 種類を用いて RMBS の解析解を導出した^{*3}。さらに彼らのモデル（以下では KTM モデルと略）は、プリペイメント率が持つ独自の期間構造と金利依存性の期間構造も考慮できるように構築されており、数値計算の結果、それ

*1 本稿では、解が既知の解析的な関数により閉じた形で表現できるものだけでなく、それらの時間積分により表現できるものも含めて解析解と呼ぶ。

*2 機構債では満期はおよそ 30 年または 35 年、支払は月次である。Kijima and Muromachi(2000) によると、時価ベースでリスク計測を行うには、将来シナリオをモンテカルロ法で多数生成し、各シナリオごとに将来時点で個々の資産の価格評価を行わねばならない。そのため、価格評価にモンテカルロ法を使う場合は二重のモンテカルロ法が必要になり、計算負荷は膨大になる。

*3 QG モデルや QG++ モデル（後述）は、近年の日本のような超低金利環境を適切に表現しうる非負性を持つ確率金利モデルとして最近注目を集めている（Kijima et al.(2014)）。

らが RMBS 価格の評価に無視できない影響を与えることを示した。しかしながら、彼らのモデルには金利上昇期にも強いネガティブ・コンベキシティが現れるという解析的モデルに共通の欠点が残されていた*4。金利モデルに関しても、カリブレーションを行うとスワップションの市場価格へのフィッティングが良くないことや、現時点の金利期間構造を再現しようとする金利の正值性が大きく損なわれるという欠点が見られた。RMBS の満期は非常に長く、しかも金利変動は RMBS 価格に大きな影響を及ぼすので、RMBS ポートフォリオの定量的なリスク管理まで念頭に置く先進的な投資家は、長期的な金利変動の影響まで考慮した、市場データと整合的な価格付けを求めている。しかし、上述の欠点を抱える KTM モデルでは彼らのニーズを満たせない。

そこで本稿では、数学的な取り扱いが容易な点を考慮して、金利とプリペイメント率の関係性はおよそ一次関数で表現できるものとし、KTM モデルの問題点を解消するための幾つかのアイデアを提案し、解析的な価格評価が可能な範囲内で金利やプリペイメント率の長期的な特性を適切に反映できるモデルについて検討する。具体的には、金利上昇期のネガティブ・コンベキシティは理論モデルの中で負のプリペイメント率が発生しうることが原因なので、正值性を持つプリペイメント率モデルを提案し、その成果を数値的に検証する。金利モデルに関しては、QG++ モデルの定数パラメータが時間区間ごとに異なる値をとる区間分割 QG++ モデルに変更することで、わずかな区間分割でカリブレーション結果が劇的に改善することを示す。

本稿の構成は以下である。2 節では RMBS の無裁定価格の算出および KTM モデルとその問題点について述べ、その改善案として、3 節では非負プリペイメント率モデルを提案し、4 節では QG++ モデルの区間分割について述べる。5 節では提案による改善効果とプリペイメント率モデルのパラメータ推定例を示し、6 節でまとめる。

2 無裁定価格の算出と KTM モデル

本節では、RMBS の無裁定価格算出の流れと岸田ら (2013) のモデルについて説明する。

2.1 RMBS のキャッシュフローと無裁定価格

本項では、現在時刻を t , $t \geq 0$ で表し、考察する RMBS の満期を $T > t$, 直前の利払時点を $t_0 \leq t$, 将来の元利金支払時点を $t_i > t$, $i = 1, \dots, m$, $t_m = T$ とする。期限前償還もデフォルトもない場合の時刻 t_i における残存元本を $M(t_i)$, 利息額を $I(t_i)$ とし、これらは現時点 t において既知とする。さらに、実際の残存元本を $M^*(t_i)$, 元本償還額を $P^*(t_i)$, 利息額を $I^*(t_i)$, $S(t_i) = M^*(t_i)/M(t_i)$ を生存率とすると、時刻 t_i におけるキャッシュフロー $CF(t_i)$ は、

$$\begin{aligned} CF(t_i) &= M^*(t_{i-1}) - M^*(t_i) + I^*(t_i) = M(t_{i-1})S(t_{i-1}) - M(t_i)S(t_i) + I(t_i)S(t_{i-1}) \\ &= (M(t_{i-1}) + I(t_i))S(t_{i-1}) - M(t_i)S(t_i) \end{aligned} \quad (1)$$

で与えられるので、 $CF(t_i)$ の変動は $S(t_{i-1})$, $S(t_i)$ の変動により表現できる。

観測確率 (統計確率などともいう、現実の確率) を P とする。ある時刻 $T^* \geq T$ まで観測確率 P と同値なリスク中立確率 Q がただ一つ存在すると仮定すると、リスク中立化法より、この RMBS

*4 通常の債券価格は金利の変化に対して凸型カーブを描き、この性質をコンベキシティという。一方、RMBS 価格では凹型カーブが現われ、これをネガティブ・コンベキシティという。これは、金利が下落すると住宅ローンの貸付金利が下がるので、借換えによるプリペイメントが増加し、価格が par 方向にシフトする (通常の債券ほど価格が上昇しない) ためである。逆に、金利が上昇するとプリペイメントのインセンティブは低下し、通常の債券の動きに近づくので、金利上昇時のカーブは凹型にならない。

の時刻 t における無裁定価格 $Price(t, T)$ は,

$$Price(t, T) = \sum_{i=1}^m E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_i} r(s) ds \right\} CF(t_i) \right] \quad (2)$$

で与えられる。ただし, $r(t)$ は時刻 t におけるリスクフリーな瞬間的な短期金利, $E_t^Q[\cdot]$ は Q のもとにおける時刻 t の条件付期待値演算子である。時刻 t において $M(t_i)$ と $I(t_i)$ は既知なので, (1) と (2) より,

$$Price(t, T) = \sum_{i=1}^m (M(t_{i-1}) + I(t_i)) E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_i} r(s) ds \right\} S(t_{i-1}) \right] \\ - \sum_{i=1}^m M(t_i) E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_i} r(s) ds \right\} S(t_i) \right]$$

となるので, RMBS の価格 $Price(t, T)$ は関数

$$V(t, t_1, t_2) = E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_2} r(s) ds \right\} S(t_1) \right], \quad t \leq t_1 \leq t_2 \quad (3)$$

の線形結合で表現できる。

ここで, 観測確率 P のもとで

$$S(u) = \exp \left\{ - \int_0^u h(s) ds \right\}, \quad 0 \leq u \leq T$$

という関係にある $h(u)$ を観測確率 P のもとにおけるプリペイメント率 (期限前償還率, 生存時間解析におけるハザード率に相当) と定義し, 同様にしてリスク中立確率 Q のもとにおけるプリペイメント率 $h^Q(u)$ も定義する。 $h(u)$ と $h^Q(u)$ の関係については後述する。すると, (3) はリスク中立確率 Q のもとにおける $r(u)$ と $h^Q(u)$ の期間構造を与えれば一意に評価できる。RMBS の実務では, $r(u)$ と $h(u)$ の期間構造を確定的な関数として与えることが多いが, 理論研究では確率過程として表現することが多く, 確率過程の選択次第でさまざまなモデルを構築できる。なお, 生存率でなくプリペイメント率をモデル化することが多いのは, 単調減少性で特徴付けられる生存率よりもモデルの構築が容易なためである。

2.2 KTM モデル

まず, 岸田ら (2013) の KTM モデルを説明する。時刻 t における短期金利 $r(t)$ はリスク中立確率 Q のもとで

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dz^Q(t), \quad x(0) = 0 \quad (4)$$

$$r(t) = (x(t) + \alpha + \beta t)^2 + \phi(t) \quad (5)$$

に従うと仮定する。ただし, a, σ, α, β は定数, $\phi(t)$ は時刻 t の確定関数, $z^Q(t)$ はリスク中立確率 Q のもとにおける標準ブラウン運動である。これは Pelsser(1997) のモデルに Brigo and Mercurio(2006) の手法を適用して現時点の金利期間構造を再現できるように調整したもので, Kijima et al.(2009) により提案された。本稿では Quadratic Gaussian++ (QG++) モデルと呼ぶ。(5) より, $\phi(t) \geq 0$ ならば将来の短期金利 $r(t)$ は負にならない。

プリペイメント率に関しては、まずは観測確率 P のもとでモデルを構築し、それをもとにリスク中立確率下のモデルを記述する。この理由は、現実に観測されるプリペイメントのデータ特性を価格に反映できるようにするためである。 P のもとにおける時刻 t のプリペイメント率 $h(t)$ は

$$h(t) = \lambda(t)(L(t) - R(t, \tau)) + g(t) \quad (6)$$

に従うと仮定する。ただし、 $\lambda(t)$, $L(t)$ は時刻 t の確定関数、 $R(t, \tau)$ は時刻 t における期間 $[t, t+\tau]$ のゼロレート*⁵である。(6)の右辺第1項はプリペイメント率の金利依存性を表す一次関数で、 $\lambda(t)$ は金利感応度、 $L(t)$ は金利の影響を考える際の基準金利である。 $L(t)$ には裏付資産である住宅ローンのWAC (weighted average coupon, 加重平均金利) が使われて定数とされることが多いが、ここでは一般化して時刻 t の確定関数とした。また、金利感応度も時刻 t の確定関数 $\lambda(t)$ としたので金利感応度の経年変化も表現できる。岸田ら (2013) は、時刻列 $\{s_i\}_{i=0, \dots, n}$, $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = T^*$, $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ をそれぞれ定数として、 $\lambda(t)$ を階段関数

$$\lambda(t) = \lambda_i, \quad t \in [s_{i-1}, s_i)$$

とすることで、金利感応度の期間構造を表現している。

(6)の右辺第2項 $g(t)$ はプリペイメント率に固有の経年依存性 (期間構造) を表す確率過程で、ベースラインプリペイメント率と呼び、

$$dg(t) = (\psi(t) - bg(t))dt + \eta(t)dz_g(t) \quad (7)$$

あるいは

$$\begin{aligned} dy(t) &= -by(t)dt + \eta(t)dz_g(t) \\ g(t) &= y(t) + \phi(t) \end{aligned} \quad (8)$$

で表現する。ただし、 b は定数、 $\eta(t)$ と $\phi(t)$ は時刻 t の確定関数で、 $\psi(t) = d\phi(t)/dt$, $z_g(t)$ は観測確率 P のもとにおける標準ブラウン運動である。(7) およびそれと等価な (8) は金利でいう Hull-White モデル (1990) (HW モデルと略) なので、現時点で観測されるベースラインプリペイメント率の期間構造を正確に再現できる。

リスク中立確率 Q のもとにおけるプリペイメント率 $h^Q(t)$ は、時刻 t の確定的な関数 $\ell(t)$ (リスクプレミアム調整率と呼ぶ) を用いて

$$h^Q(t) = h(t) + \ell(t) \quad (9)$$

と表現できると仮定する。さらに、 P から Q への測度変換は $\ell(t)$ で表現されると仮定すると、 $z_g(t)$ はリスク中立確率 Q のもとでも標準ブラウン運動になる*⁶。また、 $z_g(t)$ は $z(t)$ と独立であると仮定する。

以上の設定のもとで、岸田ら (2013) は RMBS の解析的な価格式を導出し、 $\lambda(t)$ の値がある程度大きくなると、通常の債券とは異なる RMBS 独自の金利依存性、ネガティブ・コンベキシティが現れることを示した。

*⁵ 時刻 t における満期 $t + \tau$ の割引債の最終利回りのことで、 $R(t, 0+) = r(t)$ である。岸田ら (2013) では (6) の $R(t, \tau)$ を $r(t)$ とする式から出発しているが、 $R(t, \tau)$ に変更した場合の結果も導出している。

*⁶ 信用リスクで使われる測度変換は室町 (2007) の付録 A.2 を、特に本稿で使われる測度変換は第7章を参照されたい。

2.3 KTM モデルの問題点

値格式が解析的に与えられ、現時点の金利期間構造とプリペイメント率の期間構造を再現できるなどの長所を持つ KTM モデルであるが、致命的な問題点も残されている。まず、岸田ら (2013) の数値例をみると、金利感応度 $\lambda(t)$ の値が高い場合、金利が上昇すると RMBS 価格は非常に低い値をとるが、これは実務の直観にあわない。KTM モデルでは、 $\lambda(t)$ が高い値をとり、しかも将来金利 $r(t)$ が極端に高くなると、(6) より $h(t) < 0$ になるので生存確率 $S(t)$ は時刻 t とともに上昇する。(1) によると、 $S(t)$ が過度に上昇すると RMBS 保有者はキャッシュを支払うことになるので、RMBS 価格は大きく低下する。しかし、そのようなことは現実には起こらないので、明らかにモデル上の欠陥である。

また、RMBS はキャッシュフローが長期におよぶ投資商品であり、金利はプリペイメントに大きな影響を与えるので、先進的な投資家は長期的な金利変動を考慮した、しかも現時点の市場環境と整合的な価格付けを求めている。そのため、確率金利モデルのカリブレーションにはキャップやフロアのような比較的短期のデリバティブの価格よりも、長期のテナーと満期を持つスワップション価格が使われる。ところが、KTM モデルで使用している QG++ モデルで日本市場のデータからカリブレーションを行うと、本稿 5 節の数値例で示すように、市場で観測されるスワップション価格の期間構造を再現することは難しい。また、モデルの性質上現在の金利期間構造は再現できるものの、長期になると $|\phi(t)|$ が上昇し、0 近辺から大きく乖離する。 $\phi(t)$ は将来の短期金利の下限値を意味するので、 $\phi(t)$ が 0 から大きく乖離したり負値をとることは望ましくない。これらのことは、QG++ モデルは解析的な取り扱いが容易で、かつ超低金利環境を表現するのに適したモデルではあるが、単なる QG++ モデルでは日本の金利環境を適切には表現できないことを示唆している*7。

これらの問題は KTM モデルを含む解析的な RMBS 価格モデルに共通する欠点であり、モデルを実務で使用する際の大きな阻害要因となっている。以下の節では、上述した KTM モデルの問題点への対処方法とその実装について述べ、改善効果を定量的に評価する。

3 非負プリペイメント率モデル

本節では、負のプリペイメント率の発生を回避するための工夫として、金利依存性の項が非負になるモデルと、ベースラインプリペイメント率 $g(t)$ が非負になるモデルを提案する。

3.1 金利依存項の非負化

負のプリペイメント率の発生原因の一つは (6) の右辺第 1 項の金利依存性である。金利 $R(t, \tau)$ の一次関数を使っているので、 $\lambda(t)$ が正の場合、金利の上昇につれて右辺第 1 項は低下して負値になりうる。そこで、ここでは $(x)^+ = \max(x, 0)$ を用いて、(6) を

$$h(t) = \lambda(t)(L(t) - R(t, \tau))^+ + g(t) \quad (10)$$

*7 この現象をより広い視点で捉えるならば、ボラティリティ・サーフェスへのフィッティングを考慮すべきであるが、一方で、短期間で形状が大きく変動しうるサーフェスの情報を超長期的な投資商品である RMBS 価格に反映させることも疑問視されている。本稿では中間的な立場をとり、恒常的に見られるボラティリティの期間構造パターンに着目し、ATM スワップションのボラティリティの期間構造へのフィッティングを改善することで長期的な金利変動特性を RMBS 価格に反映させることまでを考えている。

に変更したモデルを提案する。(10)の右辺第1項の金利依存項のRMBS価格への寄与を一般化して、 $t \leq t_i < t_{i+1} \leq t_j \leq t_n$ に対して

$$\begin{aligned} Z(t, t_i, t_j, t_n) &\equiv E_t^Q \left[\frac{B(t)}{B(t_n)} S(t_i, t_j) \right] \\ S(t_i, t_j) &\equiv \exp \left\{ - \int_{t_i}^{t_j} \lambda(s) (L(s) - R(s, \tau))^+ ds \right\}, \\ B(t) &\equiv \exp \left\{ \int_0^t r(s) ds \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

を定義すると、

$$\frac{V(t, t_1, t_2)}{Z(t, t, t_1, t_2)} = E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_1} (g(s) + \ell(s)) ds \right\} \right] = \exp \left\{ -\mu_G(t, t_1) + \frac{1}{2} S_G(t, t_1) \right\} L(t, t_1) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mu_G(t, s) &\equiv g(t) \frac{1 - e^{-b(s-t)}}{b} + \int_t^s \psi(u) \frac{1 - e^{-b(s-u)}}{b} du \\ S_G(t, s) &\equiv \int_t^s \eta^2(u) \left(\frac{1 - e^{-b(s-u)}}{b} \right)^2 du \\ L(t_i, t_j) &\equiv \exp \left\{ - \int_{t_i}^{t_j} \ell(s) ds \right\} \end{aligned}$$

と表現できる。しかし、残念ながら $Z(t, t, t_1, t_2)$ の解析式は得られず、したがってRMBS価格も同様なので、以下では $Z(t, t, t_1, t_2)$ の解析的近似を考える。

まず、志立(2004)のプリペイメントデータの分析結果によると、 $\lambda(t)$ は短い期間(1-2ヶ月程度)ごとに異なる値をとりうるので、 Δt をそれと同程度の定数として $t_k = k\Delta t, k = 0, 1, \dots$, $(\lambda(t), L(t)) = (\lambda_k, L_k), t \in [t_k, t_{k+1})$ と表現して、 $S(t_i, t_j)$ の指数部の積分をオイラー法で離散化し、さらに $e^x \simeq 1 + x$ を用いて、

$$S(t_i, t_j) \simeq \prod_{k=i}^{j-1} (1 - \lambda_k (L_k - R(t_k, \tau))^+ \Delta t) \quad (13)$$

と近似する。(13)を使い、満期 t_{i+1} の割引債を基準財とするフォワード中立化法で $Z(t, t_i, t_j, t_n)$ を表現すると、

$$\begin{aligned} \frac{Z(t, t_i, t_j, t_n)}{v(t, t_{i+1})} &= E_t^{t_{i+1}} \left[\frac{B(t_{i+1})}{B(t_n)} S(t_i, t_j) \right] \simeq E_t^{t_{i+1}} \left[\frac{B(t_{i+1})}{B(t_n)} \prod_{k=i}^{j-1} (1 - \lambda_k (L_k - R(t_k, \tau))^+ \Delta t) \right] \\ &= E_t^{t_{i+1}} [X(t_i, \Delta t) Y(t_{i+1}, t_j, t_n; t_i)] \\ &= E_t^{t_{i+1}} [X(t_i, \Delta t)] Y(t_{i+1}, t_j, t_n; t) + \text{Cov}_t^{t_{i+1}}(X, Y) \end{aligned} \quad (14)$$

となる。ただし、 $v(t, T)$ は時刻 t における満期 T の割引債価格、 $E_t^T[\cdot]$ は満期 T のフォワード中立確率 Q^T における条件付期待値、 $\text{Cov}_t^T(X, Y)$ は Q^T における X, Y の条件付共分散、

$$\begin{aligned} X(t_i, \Delta t) &= 1 - \lambda_i (L_i - R(t_i, \tau))^+ \Delta t \\ Y(t_{i+1}, t_j, t_n; t_i) &= E_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\frac{B(t_{i+1})}{B(t_n)} \prod_{k=i+1}^{j-1} (1 - \lambda_k (L_k - R(t_k, \tau))^+ \Delta t) \right] \\ \text{Cov}_t^{t_{i+1}}(X, Y) &= \text{Cov}_t^{t_{i+1}} [X(t_i, \Delta t), Y(t_{i+1}, t_j, t_n; t_i)] \end{aligned}$$

で、(14)の最後の等号では条件付期待値の連鎖公式を用いた。(14)より、もしも

$$|\text{Cov}_t^{t_{i+1}}(X, Y)| \ll |E_t^{t_{i+1}}[X(t_i, \Delta t)]Y(t_{i+1}, t_j, t_n; t)|, \quad (15)$$

で $\text{Cov}_t^{t_{i+1}}(X, Y)$ を無視できれば (つまり X と Y が条件付独立と近似できれば), (14) と (11) より,

$$Z(t, t_i, t_j, t_n) \simeq v(t, t_{i+1})E_t^{t_{i+1}}[X(t_i, \Delta t)]Y(t_{i+1}, t_j, t_n; t) \simeq E_t^{t_{i+1}}[X(t_i, \Delta t)]Z(t, t_{i+1}, t_j, t_n) \quad (16)$$

なので、(16)を繰り返し使うと、

$$\begin{aligned} Z(t, t_i, t_j, t_n) &\simeq E_t^{t_{i+1}}[X(t_i, \Delta t)]Z(t, t_{i+1}, t_j, t_n) \simeq \cdots \simeq Z(t, t_j, t_j, t_n) \prod_{k=i}^{j-1} E_t^{t_{k+1}}[X(t_k, \Delta t)] \\ &= v(t, t_n) \prod_{k=i}^{j-1} \left(1 - \lambda_k \Delta t E_t^{t_{k+1}}[(L_k - R(t_k, \tau))^+]\right) \end{aligned} \quad (17)$$

が得られる。

ここまで金利 $R(t, \tau)$ については特定しなかったが⁸, 時刻 t における期間 $[T_i, T_i + \Delta T_i]$ のフォワード金利

$$L(t, T_i, \Delta T_i) = \frac{v(t, T_i) - v(t, T_i + \Delta T_i)}{v(t, T_i + \Delta T_i)\Delta T_i}, \quad \Delta T_i = T_{i+1} - T_i$$

を使って $R(t, \tau) = L(t, t, \Delta t)$, $\Delta t = \tau - t$ とすると、

$$\begin{aligned} Z(t, t_i, t_j, t_n) &\simeq v(t, t_n) \prod_{k=i}^{j-1} \left(1 - \lambda_k \Delta t E_t^{t_{k+1}}[(L_k - L(t_k, t_k, \Delta t))^+]\right) \\ &= v(t, t_n) \prod_{k=i}^{j-1} \left(1 - \frac{\lambda_k}{v(t, t_{k+1})} P_{\text{floorlet}}(t, t_k, t_{k+1}, L_k)\right) \end{aligned} \quad (18)$$

となる。ここで、 $P_{\text{floorlet}}(t, t_k, t_{k+1}, L_k)$ は時刻 t における $L(t_k, t_k, \Delta t)$ に対するフロアレートの L_k のフロアレートの価格であり、QG++モデルでは解析解(付録Aを参照)が得られるので瞬時に計算できる。(18)の近似式の導出には(13)や(15)により生じる誤差、および $R(t, \tau) = L(t, t, \Delta t)$ という恣意的な設定が含まれているが、5.1節の数値例ではそれほど悪くない結果が得られている。そこで、導出方法はやや大胆であるが、本稿では(18)を近似式として提案し、数値例でも使用する。

一方、金利 $R(t, \tau)$ として期間 τ のゼロレートを使うと、岸田ら(2013)の(4.5)より、

$$\begin{aligned} R(t_k, \tau) &= A_k(x(t_k) + B_k)^2 + C_k \\ (A_k, B_k, C_k) &= \left(\frac{C_Q(t_k, t_k + \tau)}{\tau}, \frac{B_Q(t_k, t_k + \tau)}{2C_Q(t_k, t_k + \tau)}, \frac{\int_{t_k}^{t_k + \tau} \phi(s) ds - A_Q(t_k, t_k + \tau) - \frac{B_Q^2(t_k, t_k + \tau)}{4C_Q(t_k, t_k + \tau)}}{\tau} \right) \end{aligned}$$

と表現できる^{*8}。 $x(t_k)$ はフォワード中立確率 $Q^{t_{k+1}}$ のもとで正規分布に従うので、

$$\begin{aligned} E_t^{t_{k+1}}[(L_k - R(t_k, \tau))^+] &= (L_k - C_k - A_k(B_k + \mu_k)^2)(F_k(x^+) - F_k(x^-)) \\ &\quad + A_k \sigma_k^2 ((x^+ + 2B_k + \mu_k)f_k(x^+) - (x^- + 2B_k + \mu_k)f_k(x^-)) \end{aligned} \quad (19)$$

^{*8} 関数 A_Q, B_Q, C_Q の具体的な表現は岸田ら(2013)を参照されたい。

が得られる。ここで、 f_k と F_k は $P^{t_{k+1}}$ のもとにおける $x(t_k)$ の密度関数と分布関数、 (μ_k, σ_k^2) は $x(t_k)$ の期待値と分散で、 $L_k > C_k$ のときは

$$x^\pm = -B_k \pm \sqrt{\frac{L_k - C_k}{A_k}} \quad (\text{複号同順})$$

で、 $L_k \leq C_k$ のときは $E_t^{t_{k+1}} [(L_k - R(t_k, \tau))^+] = 0$ である。(19) を用いても (17) は瞬時に計算できる。ただし、 $R(t, \tau)$ として短期でなく中長期のゼロレートを用いる場合、(15) の近似が成立しにくくなる。なぜならば、 τ が長くなるほど $R(t_k, \tau)$, $k = i, \dots, j-1$ の相互依存性が高まるからである。そこで、本稿では (19) は提案だけに留め、数値計算では使用しない。なお、金利 $R(t, \tau)$ として長期のスワップレートを使うことは実務的にはもっともらしいが、その場合、 $E_t^{t_{k+1}} [(L_k - R(t_k, \tau))^+]$ は Constant Maturity Swap オプションと同じ形になり、解析的な評価は難しい*9。

3.2 ベースラインプリペイメント率への QG++ モデルの適用

さらにベースラインプリペイメント率 $g(t)$ を QG++ モデルで表現すれば、プリペイメント率の非負化はより確実になる。そこで、観測確率 P のもとにおける (8) を

$$dx_p(t) = -a_p x_p(t) dt + \sigma_p dz_p(t), \quad x_p(0) = 0 \quad (20)$$

$$g(t) = (x_p(t) + \alpha_p + \beta_p t)^2 + \phi_p(t) \quad (21)$$

に変更する。ただし、 $a_p, \sigma_p, \alpha_p, \beta_p$ は定数、 $\phi_p(t)$ は時刻 t の確定的な関数で、 $z_p(t)$ は確率測度 P のもとにおける $z(t)$ とは独立な標準ブラウン運動とする。このとき、観測確率 P のもとにおける条件付期待値演算子を $E_t^P[\cdot]$ とすると、

$$E_t^P \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_1} g(s) ds \right\} \right]$$

は QG++ 金利モデルにおける割引債価格に相当するので解析的に表現できる。具体的な表現は岸田ら (2013) を参照されたい。

このモデルを用いると、(21) より、

$$E^P[g(t)] = E^P[x_p^2(t)] + 2(\alpha_p + \beta_p t) E^P[x_p(t)] + (\alpha_p + \beta_p t)^2 + \phi_p(t)$$

となるが、(20) より、 $x_p(t)$ は期待値 $E^P[x_p(t)] = 0$ 、分散

$$V^P[x_p(t)] = \sigma_p^2 \int_0^t e^{-2a_p(t-s)} ds = \frac{\sigma_p^2}{2a_p} (1 - e^{-2a_p t}) \quad (22)$$

の正規分布に従うので、

$$E^P[g(t)] = \frac{\sigma_p^2}{2a_p} (1 - e^{-2a_p t}) + (\alpha_p + \beta_p t)^2 + \phi_p(t) \quad (23)$$

が得られる。さらに、 $x_p(t)$ が正規分布に従うことから $E^P[x_p^4(t)] = 3(V^P[x_p(t)])^2$ であり、(22) も使えば、

$$V^P[g(t)] = E^P [(g(t) - E^P[g(t)])^2] = \frac{\sigma_p^4}{2a_p^2} (1 - e^{-2a_p t})^2 + \frac{2\sigma_p^2}{a_p} (\alpha_p + \beta_p t)^2 (1 - e^{-2a_p t}) \quad (24)$$

*9 級数展開による近似は可能である。例えば Tanaka et al.(2010) を参照されたい。

が得られる。

(23) と (24) はそれぞれベースラインプリペイメント率の期待値と分散の期間構造を表しているの
で、これらがプリペイメントの観測データから推定した期待値と分散の期間構造にあうようにパラ
メータを決定すれば、現時点で観測されるベースラインプリペイメント率のかなりの情報をモデル
に反映できる。特に、(23) には時刻 t の確定的な関数 $\phi_p(t)$ が含まれているので、期待値の期間構
造はこのモデルで正確に再現できる。

4 区間分割 QG++ モデル

2.3 節で挙げた課題のうち、スワップション価格へのフィッティングを少しの工夫で改善するには
区間分割 QG++ モデルの使用が有効である。具体的には、 $t \in [t_{i-1}, t_i]$ において

$$\begin{aligned} dx(t) &= -a_i x(t) dt + \sigma_i dz(t) \\ r(t) &= (x(t) + \alpha_i + \beta_i t)^2 + \phi(t) \end{aligned}$$

に従うと仮定する。ただし、 $x(0) = 0$ とし、 $t_i, i = 1, \dots, k-1$ は $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k =$
 $T^*, T^* \geq T$ を満たす実数列で、 $(\alpha_i, \beta_i), i = 1, \dots, k-1$ は

$$\alpha_i + \beta_i t_i = \alpha_{i+1} + \beta_{i+1} t_i \quad (25)$$

を満たす定数とする。(25) は金利 $r(t)$ が $t = t_i$ で連続であるための条件である。

4.1 割引債の価格式

このモデルでも、満期 T の割引債の時刻 $t, t \leq T \leq T^*$ における価格

$$v(t, T; x(t)) = E_t^Q \left[\exp \left\{ - \int_t^T r(s) ds \right\} \right]$$

は解析的に表現できる。まず、Feynman-Kac の定理より、 $v(t, T; x(t))$ は

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a_i x(t) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_i^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = [(x(t) + \alpha_i + \beta_i t)^2 + \phi(t)] v, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i$$

を満たす。ここで、 $t \in [t_{i-1}, t_i]$ において

$$\log v(t, T; x(t)) = - \int_t^T \phi(s) ds + D_0(t, T, i) - D_1(t, T, i) x(t) - D_2(t, T, i) x^2(t) \quad (26)$$

とおくと、 D_0, D_1, D_2 は連立常微分方程式

$$\frac{dD_2(t, T, i)}{dt} = 2a_i D_2(t, T, i) + 2\sigma_i^2 D_2^2(t, T, i) - 1 \quad (27)$$

$$\frac{dD_1(t, T, i)}{dt} = [a_i + 2\sigma_i^2 D_2(t, T, i)] D_1(t, T, i) - 2(\alpha_i + \beta_i t) \quad (28)$$

$$\frac{dD_0(t, T, i)}{dt} = -\frac{\sigma_i^2}{2} [D_1^2(t, T, i) - 2D_2(t, T, i)] + (\alpha_i + \beta_i t)^2 \quad (29)$$

の解で、境界条件は、

$$D_2(t_i, T, i) = D_2(t_i, T, i+1) \quad (30)$$

$$D_1(t_i, T, i) = D_1(t_i, T, i+1) \quad (31)$$

$$D_0(t_i, T, i) = D_0(t_i, T, i+1) \quad (32)$$

で与えられる。特に、時刻 t を含む区間を p 、満期 T を含む区間を q 、すなわち、 $t \in [t_{p-1}, t_p]$ 、 $T \in [t_{q-1}, t_q]$ とすると、満期における境界条件は

$$D_2(T, T, q) = D_1(T, T, q) = D_0(T, T, q) = 0 \quad (33)$$

である。連立常微分方程式 (27)–(29) を、(33) を境界条件として区間 $i = q$ から前に向かって（区間の端点では (30)–(32) を境界条件として）区間 $i = p$ まで解くことにより $D_j(t, T, p)$, $j = 0, 1, 2$ 、そして $v(t, T; x(t))$ が得られる。 $D_j(t, T, p)$, $j = 0, 1, 2$ の具体的な表現は付録 B を参照されたい。

区間分割 QG++ モデルへ変更しても、KTM モデルによる RMBS 価格は使用できる。ただし、割引債価格を区間分割 QG++ モデルによる式に変更し、RMBS 価格に含まれる金利モデルのパラメータ値を区間に応じて使い分けることは必要である。

4.2 スワップション価格の近似式

金利モデルのパラメータ $(a, \sigma, \alpha, \beta)$ と $\phi(t)$, $t \in [0, T^*]$ は現時点の金利期間構造と流動性の高い金利デリバティブの市場価格から推定する。RMBS は満期が長いので、長期的な金利変動性を価格に反映して評価するためにはカリブレーションでスワップションの市場価格を用いるのが適切である。その際、QG++ モデルではスワップション価格の解析解が得られないので、本稿では Piterbarg(2009) による近似式を使用する。Piterbarg の近似の考え方は QG++ モデルだけでなく、区間分割 QG++ モデルにも適用できる。これらのモデルにおける近似式の具体的な表現は付録 D を参照されたい。なお、近似式の導出に必要な詳細を付録 C にまとめる。

5 数値例

本節ではまず、非負プリペイメント率モデルより得られる RMBS 価格が KTM モデルよりも実務的にもっともらしく振る舞うことを示す。次に、スワップション価格の近似式^{*10}を用いて観測データから金利モデルのパラメータを推定し、区間分割により推定結果がさまざまな意味で大幅に改善することを示す。さらに、プリペイメント率モデルのパラメータ推定の具体例と、モデル選択の RMBS 価格への影響を数値例で示す。

5.1 非負プリペイメント率モデルの効果

本項では、3 節で述べた非負プリペイメント率モデルにより RMBS 価格の振る舞いがどの程度改善するかを数値例で示す。なお、以下の計算では (9) のリスクプレミア調整率を $\ell(t) = 0$ とする。

表 1 に、計算で使用する RMBS の諸元、QG++ モデル（ここでは区間分割しないモデルを使用）およびプリペイメント率モデルのパラメータを示す。また、現時点におけるゼロレートは期間によらず連続複利 5% で一定とした。ただし、ベースラインプリペイメント率過程には (8) を使用し、単純化のため $\eta(t) = \eta$ （定数）として、 $\psi(t)$ はモデルによる期待値 $E[g(t)]$ が PSA モデルの CPR(Conditional Prepayment Rate) 曲線を再現するように与えた。これらは岸田ら (2013) の数値例と同じ設定である。(8) を使用した理由は、3 節で提案したプリペイメント率の金利依存項の非

^{*10} 近似式の精度は、数値積分により得られる厳密解と比較して確認した。本稿で使用した設定のもとでほとんどの価格の相対誤差は 1% 未満であったが、スワップションの満期が 10 年、あるいはスワップのテナーが 15 年以上になると 1% を超えるものも現れた。

負化の効果を岸田ら (2013) と比較することにより明示するためである。

表 1 使用するモデルパラメータ (岸田ら (2013) と同じ)

MBS 諸元		QG++ モデル		プリペイメント率モデル	
当初元本 (円)	100	a	0.1	λ	4 種類
クーポン率 (%)	4.5	σ	0.05	L	5.0 %
満期 (年)	30	α	0	b	0.734
		β	0	η	0.02
				PSA 倍率	167 %

まず, (18) の近似式の妥当性を検討する. 3 節でも述べたように, この近似式の導出には大胆な離散化や確率変数 $X(t_i, \Delta t)$ と $Y(t_{i+1}, t_j, t_n; t)$ の条件付独立性の仮定, 恣意的な変数の設定が使われているので, その妥当性は明らかではない. そこで, 数値計算により近似の精度を調べる. 表 2 に, 後述する数値例の中で金利の影響が最も強い $\lambda = 3$ の場合の (18) による Z の近似値と, (11) で定義された Z の 10 万シナリオ (1000 回ずつ 100 バッチ) のモンテカルロ法による推定値を示す. 金利シフト幅がゼロ, すなわち現時点のゼロレートが 5% フラットの場合, モンテカルロ法による推定値 (M-C 結果) と (18) による近似値 (近似結果) の相対誤差は約 30 年でも 0.6% 以下 (99% 信頼水準) と十分に小さいが, 金利シフト幅が 5%, すなわち現時点のゼロレートが 10% フラットと高くなると相対誤差は同信頼水準で 3% 近くまで増加する. しかし, Z 値の累積としての RMBS 価格の相対誤差は, 金利シフト幅ゼロで 0.1%, シフト幅 5% で 0.6% であり, これはスプレッドに換算すると高々数 bp 程度なので, 証券会社による値付けの違いよりも十分に小さい. 金利が 5% シフトすると Z 値の誤差は比較的大きくなるが, これほどの高金利へのシフトはなかなか発生しないこと, 相対誤差が高まってくる長期部分のキャッシュフローが RMBS 価格に与える影響は相対的に小さいこと, そして Z 値の誤差は経過月数によって変動し, 時には符号も変わるので RMBS 価格としての相対誤差は Z 値の相対誤差よりも小さくなることから, (18) の近似式はそれほど悪くなく, 実務でも十分に使えると考えられる.

表 2 Z 値の近似結果とモンテカルロ法結果の比較

経過月数	金利シフト幅 (0%)			金利シフト幅 (5%)		
	近似結果	M-C結果 (信頼水準=99%)	相対誤差 (%)	近似結果	M-C結果 (信頼水準=99%)	相対誤差 (%)
60	0.7508	0.7533 ± 0.0001	-0.32 ± 0.01	0.6061	0.6063 ± 0.0001	-0.03 ± 0.02
120	0.5476	0.5486 ± 0.0002	-0.18 ± 0.03	0.3697	0.3676 ± 0.0002	0.56 ± 0.06
180	0.3952	0.3954 ± 0.0002	-0.04 ± 0.05	0.2254	0.2227 ± 0.0002	1.19 ± 0.09
240	0.2844	0.2840 ± 0.0002	0.15 ± 0.07	0.1375	0.1351 ± 0.0002	1.74 ± 0.11
300	0.2045	0.2038 ± 0.0002	0.34 ± 0.09	0.0838	0.0819 ± 0.0001	2.26 ± 0.14
359	0.1478	0.1470 ± 0.0001	0.52 ± 0.10	0.0515	0.0501 ± 0.0001	2.74 ± 0.15

図 1 と表 3 に, 負のプリペイメント率が発生しうる KTM モデルと, (18) の近似を用いた新モデルによる RMBS 価格を示す. ここでは現時点のゼロレートカーブを金利シフト幅だけ平行に上下させたときの RMBS の理論価格を, いくつかの金利感応度 λ に対して算出している. これらの図

表によると、金利シフト幅がマイナスの場合、新モデルによる価格はいずれも KTM モデルに近い値をとる。しかし、金利シフト幅がプラスの場合、KTM モデルによる RMBS 価格は金利シフトとともに下落し、しかも λ によって価格に大きな差が生じるが、新モデルによる価格は $\lambda = 1.0$ でも $\lambda = 3.0$ でもほとんど変わらず、その値は KTM モデルにおける $\lambda = 0$ の場合、すなわちプリペイメント率が金利の影響を受けない場合の価格に近い。このような新モデルによる RMBS 価格の振る舞いは、プリペイメントの影響が金利下落時には明確に現れるが、金利上昇時には現れにくいという実務的な直観と整合的である。これらの結果から、(18) の近似を用いた新モデルは KTM モデルよりも RMBS の価値を適切に表現していると考えられる。

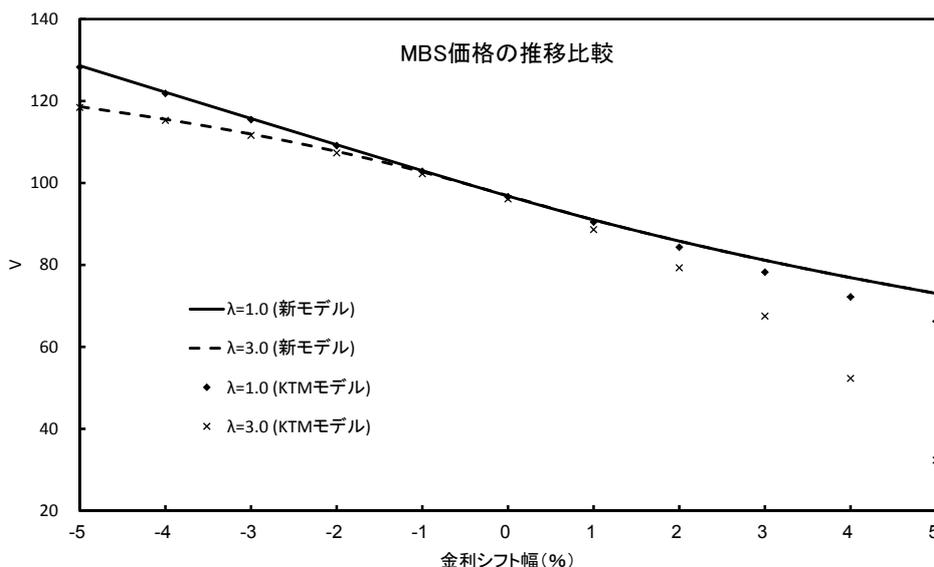


図1 負のプリペイメント率の回避による MBS 価格の比較

5.2 金利モデルのカリブレーション

次に、観測データを用いた金利モデルのパラメータの推定例を示す。ここでは目的関数

$$f(a, \sigma, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^m \left| \frac{S_i - S_{i(Black)}}{S_{i(Black)}} \right| + p_\phi \sum_{i=1}^l |\phi_i| + p_\sigma \sum_{i=1}^{k-1} |\sigma_{i+1} - \sigma_i| + p_{\sigma_2} \sum_{i=1}^{k-2} |\sigma_{i+2} + \sigma_i - 2\sigma_{i+1}| \quad (34)$$

を最小化するパラメータを求めた。ただし、金利モデルの区間分割数を k 、各区間 $i, i = 1, \dots, k$ におけるパラメータを $(a, \sigma_i, \alpha_i, \beta_i)$ とし、 $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ と表現し、平均回帰力 a は区間によらず一定とした。 $S_i, S_{i(Black)}, i = 1, \dots, m$ は i 番目のスワップションの理論価格と Black 式による市場価格、 $\phi_i, i = 1, \dots, l$ はそれぞれ確定関数 $\phi(\cdot)$ のサンプリング時刻 t_i における値 $\phi_i = \phi(t_i)$ である。この方法は Hull(2012) に因んだペナルティ関数法で、目的関数 (34) の第 1 項はノルム、定数 $p_\phi, p_\sigma, p_{\sigma_2}$ はそれぞれ ϕ_i へのペナルティ、 σ_i の勾配へのペナルティ、 σ_i の湾曲へのペナルティの相対的な重要度を示す係数である。以下では $p_\phi = p_\sigma = p_{\sigma_2} = 10$ のときの結果を示す*¹¹。区間分割も最適化で決定することは可能だが、直感

*¹¹ 実際にはさまざまな $(p_\phi, p_\sigma, p_{\sigma_2})$ で推定を行った中で、ノルムが比較的小さく、 $|\phi(t)|$ があまり大きな値をとらず、かつ各区間のパラメータの推定値の差が比較的小さいものを示している。なお、本稿では価格の相対誤差をノルムと

表3 KTMモデルと新モデルによるRMBS価格

金利 シフト 幅 (%)	新モデル			KTMモデル			
	λ			λ			
	1.0	2.0	3.0	0.0	1.0	2.0	3.0
-5.0	128.63	122.63	118.64	138.05	128.29	122.35	118.44
-4.0	122.15	118.30	115.54	127.60	121.85	118.00	115.28
-3.0	115.72	113.58	111.93	118.43	115.46	113.28	111.62
-2.0	109.34	108.45	107.71	110.35	109.13	108.15	107.33
-1.0	103.02	102.85	102.71	103.17	102.85	102.55	102.24
0.0	96.80	96.85	96.89	96.78	96.62	96.41	96.11
1.0	90.99	90.99	90.99	91.06	90.44	89.67	88.62
2.0	85.81	85.81	85.81	85.91	84.31	82.22	79.30
3.0	81.14	81.14	81.14	81.26	78.23	73.98	67.51
4.0	76.90	76.90	76.90	77.05	72.20	64.82	52.32
5.0	73.04	73.04	73.04	73.22	66.21	54.58	32.35

的な解釈を優先し、イールドカーブの形状をもとに [0, 1], [1, 5], [5, 15], [15, 30] 年とした。

推定に使用した割引率を表4に、スワップションのボラティリティマトリックスを表5に*12、パラメータの推定結果を表6に示す。表6より、QG++モデルと区間分割QG++モデルのパラメータ推定値は大きく異なり、ノルムは区間分割によって大幅に低下することがわかる。図2には推定パラメータによるスワップション価格の理論値と市場価格を示す。点線はQG++モデルによる理論価格、実線は区間分割モデルによる理論価格、菱形のマーカーは市場価格である。QG++モデルによる理論価格は、テナー（Swap Tenor）5年未満のフィッティングは比較的良好だが、10年以上では市場価格からの乖離が顕著になる。また、テナー1,2年でスワップションの満期（Expiration）4年以下の理論価格は明らかに高い。一方、区間分割QG++モデルによる理論価格は、テナーが長くなってもQG++モデルほど市場価格から乖離せず、テナー1,2年で満期4年以下の市場価格もある程度再現できている。

表6の推定値を区間別にみると、区間分割QG++モデルの α と β はイールドカーブの形状にあわせて大きく変動している。また、 σ は15年以下では3%程度であるが、15年超では大幅に低下する。一方、QG++モデルの σ はかなり高く、このためテナー1,2年で満期4年以下の理論価格が高くなると考えられるが、それでも長期での理論価格は市場価格よりかなり低い。

図3に示した $\phi(t)$ の期間構造をみると、QG++モデルの $|\phi(t)|$ は特に長期の部分で大きく、しかも $\phi(t)$ が負値になっている。このモデルでは初期時点のイールドカーブを再現できることが保証されているものの、 $\phi(t)$ は時刻 t における短期金利の下限値を意味するので、 $|\phi(t)|$ が大きな値をとることや変動が激しいことは好ましくなく、特に $\phi(t)$ が負値をとることはもともと目指していた正金利モデルでなくなることを意味している。区間分割QG++モデルも、 $\phi(t)$ が負になる領域は現れるので厳密には正金利モデルとは言えない。しかし、継続的に負になる領域が現れるのは比較的

したが、インプライドボラティリティの相対誤差をノルムとして最適化してもよい。

*12 割引率とボラティリティは2012/5/7のThomson Reuters社提示値である。

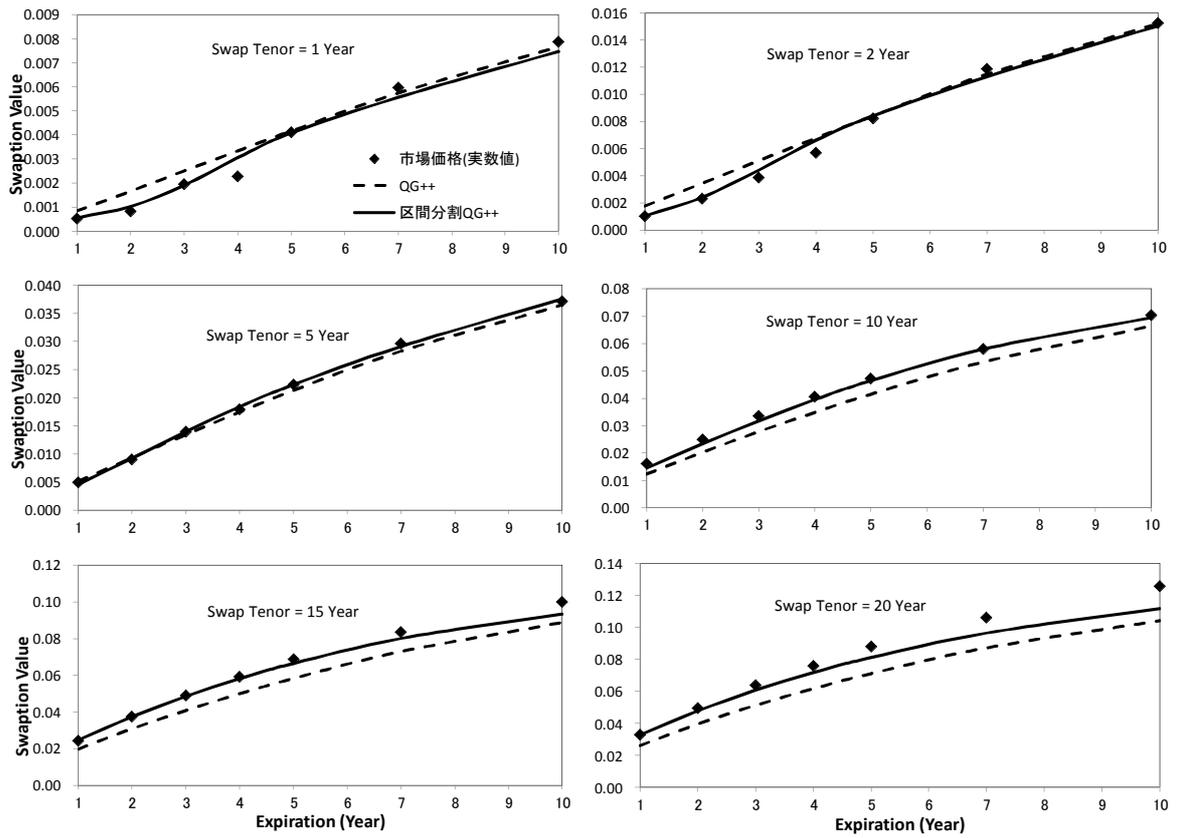


図2 スワップションの理論価格と市場価格

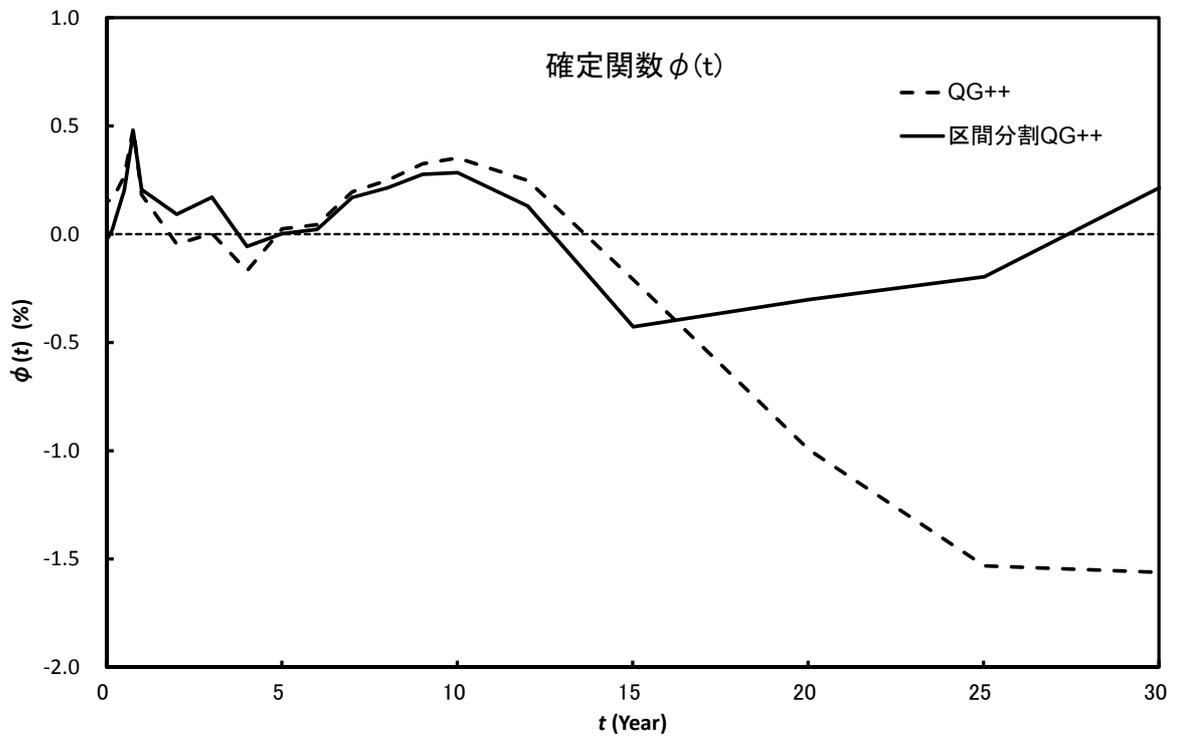


図3 $\phi(t)$ の期間構造

表4 カリブレーションに使用した割引率

Tenor	0	1W	1M	2M	3M	6M	9M	1Y	2Y	3Y	4Y
DF	1	0.99997	0.99985	0.99972	0.99956	0.99897	0.99806	0.99660	0.99311	0.99020	0.98510
Tenor	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y	12Y	15Y	20Y	25Y	30Y
DF	0.97993	0.97110	0.96038	0.94643	0.93060	0.91267	0.87370	0.81174	0.71624	0.63924	0.57510

表5 スワップションのボラティリティマトリックス (%)

Expiration	Swap Tenor											
	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y	15Y	20Y
1Y	38.2	40.4	44.2	48.1	49.2	48.5	46.2	43.5	41.1	39.1	30.1	27.9
2Y	51.3	52.4	53.8	52.1	49.6	46.6	43.9	41.6	39.5	37.5	30.5	28.7
3Y	57.4	56.1	53.4	50.2	47.4	44.3	41.6	39.5	37.7	36.0	30.5	29.2
4Y	58.6	53.2	48.9	44.9	42.5	40.0	38.0	36.3	35.0	33.9	30.1	29.3
5Y	55.4	49.5	44.4	41.1	38.4	36.5	35.1	33.9	33.0	32.2	29.7	29.5
7Y	43.0	39.6	36.9	34.9	33.4	32.3	31.5	30.9	30.5	30.2	29.5	29.8
10Y	33.5	32.3	31.5	30.8	30.3	29.9	29.7	29.5	29.4	29.4	30.1	30.7

表6 スワップション価格による金利モデルのパラメータの推定値

モデル	分割区間 (年)	σ	a	α	β	ノルム
QG++	-	0.03905	0.00100	0.00528	0.00648	10.03
区間分割 QG++	0 ~ 1	0.03276	0.00100	0.04288	-0.02372	3.25
	1 ~ 5	0.03032		0.04056	-0.02140	
	5 ~ 15	0.03061		-0.02817	-0.00765	
	> 15	0.01001		-0.12981	-0.00088	

長期の部分であり、かつ絶対値が小さいため、実務的には許容できると考えられる。

スワップションの市場価格からの乖離幅の許容範囲の設定や、 $\phi(t)$ に非負制約を課した安定な推定方法の開発など、まだまだ課題は残されているが、区間分割 QG++ モデルは比較的単純な構造を持つ正金利確率モデルの有望な選択肢の一つと考えられる。

5.3 プリペイメント率モデルのパラメータ推定

本項ではプリペイメントモデルの金利感応度係数とベースラインプリペイメント率モデルのパラメータを実際のプリペイメント率のデータから推定し、さらに、モデル選択の RMBS 価格への影響を調べる。

5.3.1 金利感応度係数の推定

5.1 項の RMBS 価格の数値例では金利感応度係数 λ を時間に依存しない定数として扱ったが、志立 (2004) などの実証分析によれば発行時点からの経過時間に依存することが知られているので、まず λ の期間構造の推定を志立 (2004) の分析手法に基づいて実行した。プリペイメント率データは 1983 年 4 月 15 日から 2011 年 6 月 3 日までに発行された住宅金融公庫および住宅金融支援機構の貸付債権担保債券のものを使用した。2011 年 7 月 31 日時点で入手可能なプリペイメント率は加重平均経過期間 (WALA) にして 24 年までであったが、23 年以下のデータは各年数あたり 80 個以上あるのに対し、24 年のデータは 8 個と少なかったので、推定誤差を考慮して 23 年までを使用した。

具体的には以下の回帰式で経過年 1 年毎に金利感応度 λ を推定する。

$$CPR_i = \lambda \Delta r_i + \alpha + \varepsilon_i$$

ただし、 CPR_i は i 番目のデータのプリペイメント率、 Δr_i は i 番目のデータの金利差で、当該債券の WAC (加重平均金利) から CPR を算出した時点における期間 10 年のスワップレート^{*13}を引いた値、 ε_i は i 番目のデータの残差、 α は回帰定数である。

図 4 に λ の推定値を実線で示す。また、この推定のイメージを示すため、図 5 に経過年が [5, 6] 年および [20, 21] 年の CPR 値とその回帰直線を示す。図 4 によると、11 年以降の λ には一定の傾向は見られないが、この原因は図 5 を見ると判明する。5 年から 6 年間の CPR 値は金利差との間に一定の傾向が見られるが、20 年から 21 年間の CPR 値に金利差との明確な依存関係は見出しにくい。11 年以降のような一定の傾向を持たない分析結果に関しては、推定値をそのまま使用するのも一つの方法であるが、ここでは金利感応度の影響は経過年数 10 年付近までで十分に表現できていると考えて、11 年以降は経過年数 30 年で金利依存性がなくなるように単純化して使用する (図 4 の破線を参照)^{*14}。

5.3.2 ベースラインプリペイメント率モデルのパラメータ推定

次に、ベースラインプリペイメント率が QG++ モデルまたは HW モデルに従うとしてパラメータを推定する。以後、本項では金利効果除去後の CPR 観測値を単に CPR 観測値と呼び、期間と区間を同一の意味で用いる。

まず、図 6 に CPR 観測値の平均値の期間構造を黒丸で示す。本来の CPR がこのように短時間で振動的振舞をするとは考えにくいので、最小曲率 3 次スプライン法 (例えば Hutchinson(1986) を参照) によるスムージングを行ってからシフト関数を推定した。図 6 の太い実線がスムージングした結果である。3 年目から 5 年目にかけて CPR が減少するのは、この期間において金利感応度係数が大きな値を取るためである (図 4 参照)。

次に、図 7 に CPR 観測値の標準偏差を黒丸で示す。標準偏差は 11 年頃までは増加するが、それ以降は減少に転じているのが見て取れる。このような期間構造を全期間同一のモデルパラメータを用いる 1 期間モデルで再現することは困難なので、ここでは 2 期間モデルを用いて表現する。第 1 区間を $[0, t_1)$ 、第 2 区間を $[t_1, t_2)$ とすると、2 期間モデルの期待値と分散は以下で与えられる。

^{*13} プリペイメント率には長期金利が反映されるという実務的な直観から 10 年スワップレートで回帰したので、価格近似式とは整合的でない。一方、近似式にあわせて短期金利を使って分析すると、長期におよぶ超低金利の影響を受けてしまうため、推定結果が本来想定している金利感応度を示すかどうか疑わしい。そこで問題が残ることは認識しつつ、実務的な直観に基づく前者を選択した。

^{*14} 他にもさまざまな設定がありうるが、その違いによる価格差は小さく、後述の結果にほとんど影響しない。

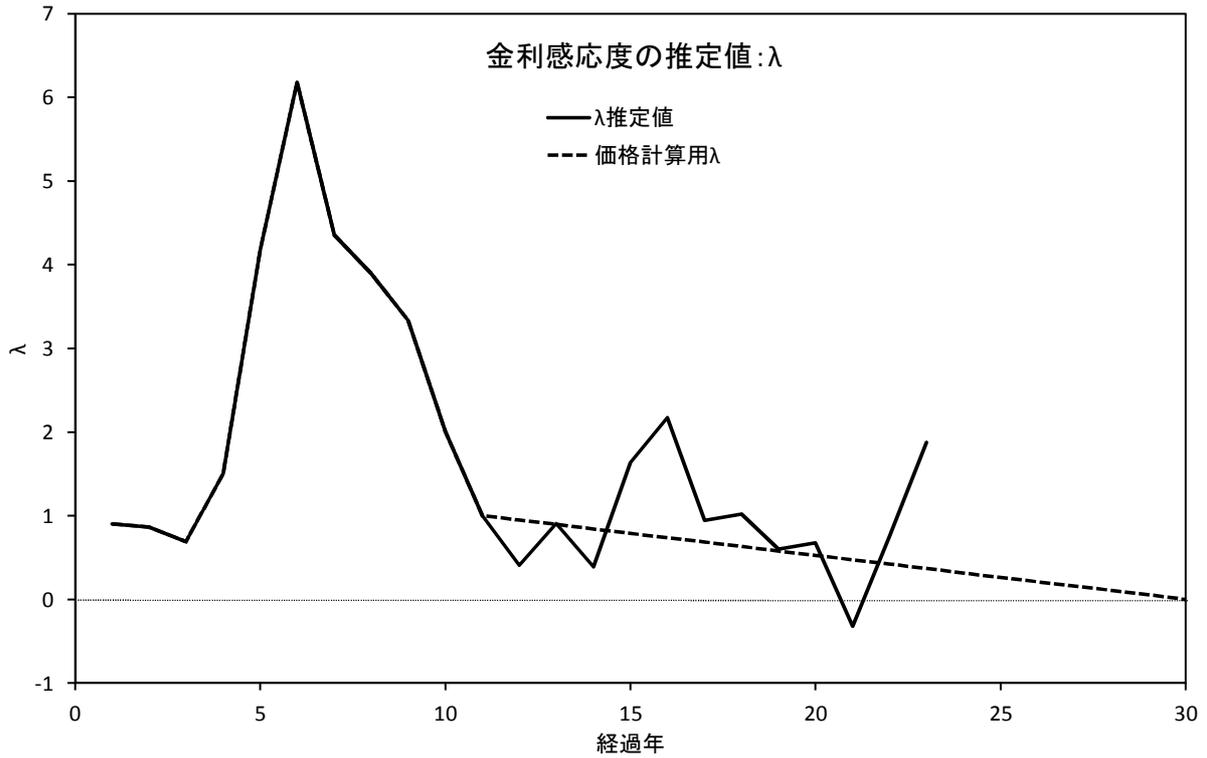


図4 金利感応度係数 λ の期間構造. 実線が最小自乗推定値で, 破線は価格計算用の修正した値.

■状態変数モデル 区間 1

$$dx_{p1}(t) = -a_{p1}x_{p1}(t)dt + \sigma_{p1}dz_{p1}(t), \quad x_{p1}(0) = 0$$

$$E^P[x_{p1}(t)] = 0$$

$$V^P[x_{p1}(t)] = \frac{\sigma_{p1}^2}{2a_{p1}}(1 - e^{-2a_{p1}t})$$

■状態変数モデル 区間 2

$$dx_{p2}(t) = -a_{p2}x_{p2}(t)dt + \sigma_{p2}dz_{p2}(t)$$

$$E^P[x_{p2}(t)] = 0$$

$$V^P[x_{p2}(t)] = e^{-2a_{p1}(t-t_1)}V^P[x_{p1}(t_1)] + \frac{\sigma_{p2}^2}{2a_{p2}}(1 - e^{-2a_{p2}(t-t_1)})$$

■HW モデル 区間 1

$$g_{p1}(t) = x_{p1}(t) + \phi_p(t)$$

$$E^P[g_{p1}(t)] = \phi_p(t)$$

$$V^P[g_{p1}(t)] = V^P[x_{p1}(t)]$$

■HW モデル 区間 2

$$g_{p2}(t) = x_{p2}(t) + \phi_p(t)$$

$$E^P[g_{p2}(t)] = \phi_p(t)$$

$$V^P[g_{p2}(t)] = V^P[x_{p2}(t)]$$

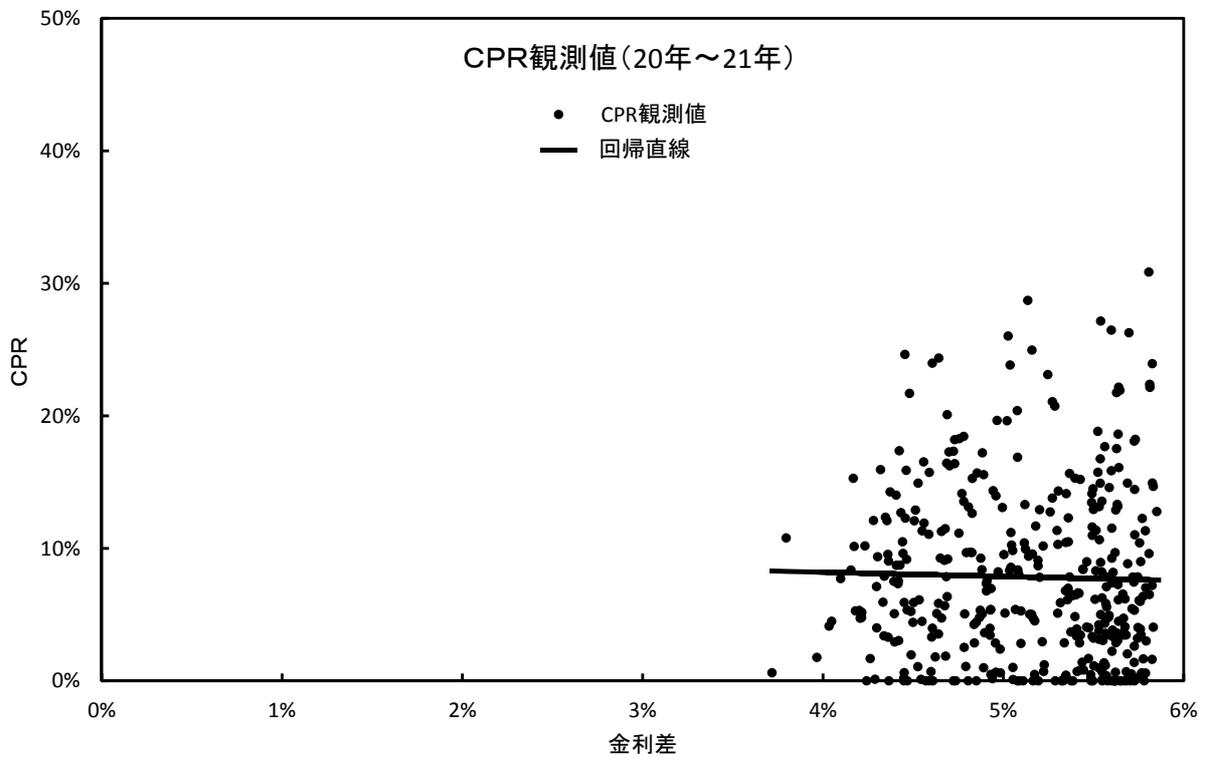
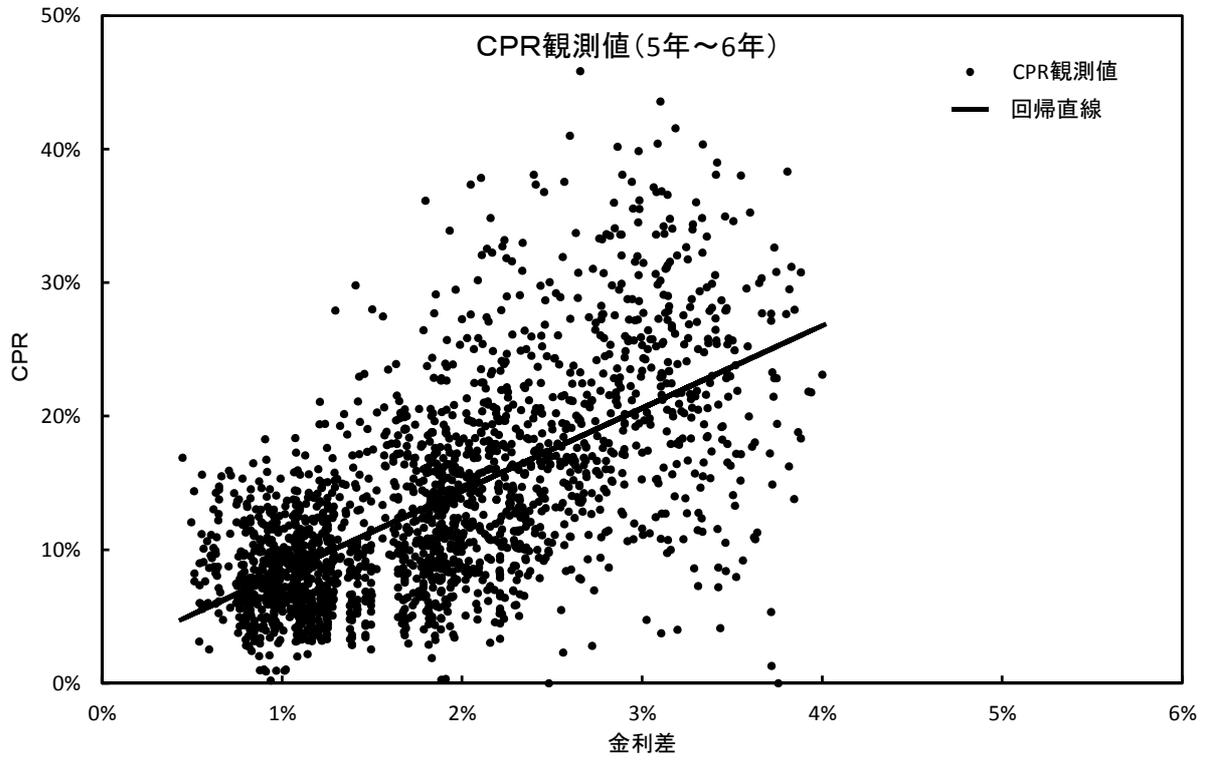


図5 CPR観測値と回帰直線による推定値

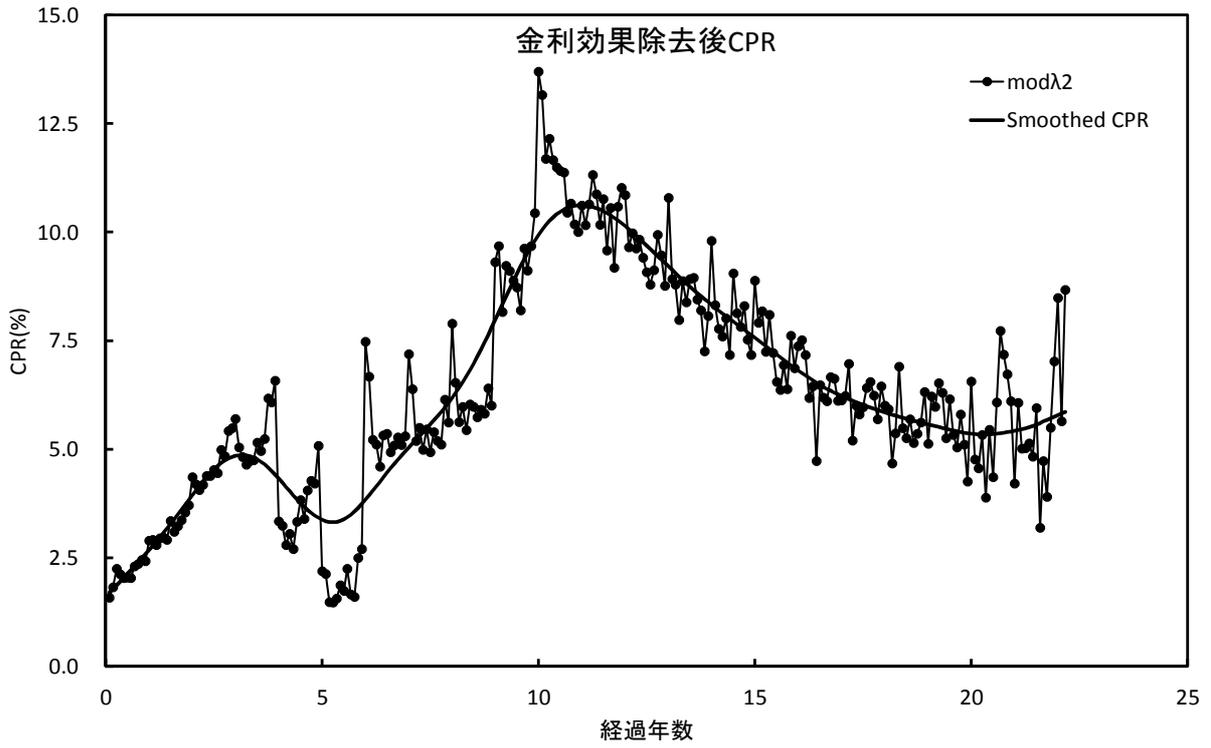


図6 金利効果除去後のCPR観測値(黒丸)とスムージングしたCPR値(太い実線)

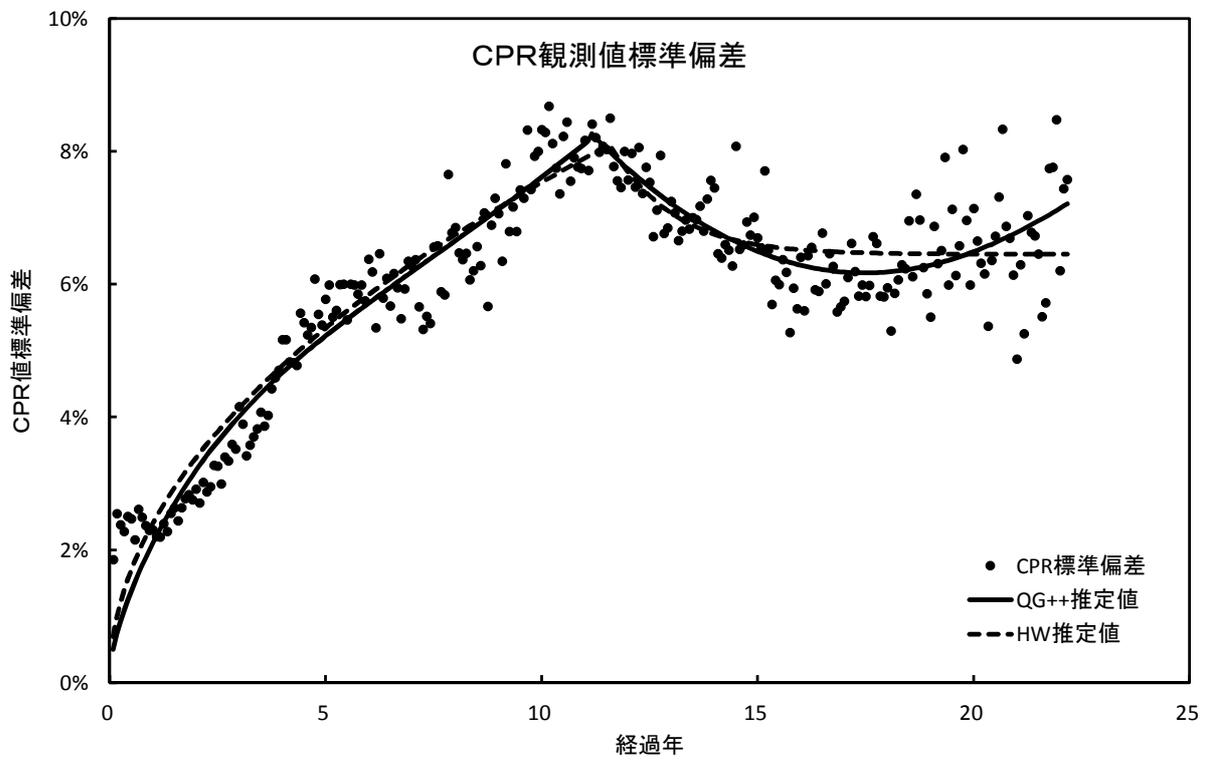


図7 CPR観測値の標準偏差の期間構造.

■QG++ モデル 区間 1

$$g_{p1}(t) = (x_{p1}(t) + \alpha_{p1} + \beta_{p1}t)^2 + \phi_p(t)$$

$$E^P[g(t)] = \frac{\sigma_{p1}^2}{2a_{p1}}(1 - e^{-2a_{p1}t}) + (\alpha_{p1} + \beta_{p1}t)^2 + \phi_p(t)$$

$$V^P[g(t)] = \frac{\sigma_{p1}^4}{2a_{p1}^2}(1 - e^{-2a_{p1}t})^2 + \frac{2\sigma_{p1}^2}{a_{p1}}(\alpha_{p1} + \beta_{p1}t)^2(1 - e^{-2a_{p1}t})$$

■QG++ モデル 区間 2

$$g_{p2}(t) = (x_{p2}(t) + \alpha_{p2} + \beta_{p2}t)^2 + \phi_p(t)$$

$$E^P[g(t)] = V^P[x_{p2}(t)] + (\alpha_{p2} + \beta_{p2}t)^2 + \phi_p(t)$$

$$V^P[g(t)] = 2(V^P[x_{p2}(t)])^2 + 4(\alpha_{p2} + \beta_{p2}t)^2V^P[x_{p2}(t)]$$

CPR の WALA は 24 年まで使用可能であったが³、267 ヶ月以降は月毎のデータ数が 10 以下なので、ここでは $t_2 = 266$ ヶ月を採用した。平均回帰係数とボラティリティおよび t_1 はモデルによる標準偏差と観測値の標準偏差の残差 2 乗和が最小になるように推定した。その結果を表 7 に示す。また、モデルによる標準偏差を図 7 の実線 (QG++ モデル) と破線 (HW モデル) に示す。両モデルとも観測値をよく再現できているが、11 年目以降ではややモデル推定値に違いが見られる。

表 7 ベースラインプリペイメントモデルのカリブレーション結果

モデル	区間 (年)	ボラティリティ	平均回帰係数	α	β
QG++ モデル	[0, 11.1)	0.1184	0.1468	-0.0711	0.0168
	[11.1, 30)	0.1854	0.3941	0.3327	-0.0191
HW モデル	[0, 11.6)	0.0239	0.0010	—	—
	[11.6, 30)	0.0556	0.3712	—	—

図 8 は、CPR の平均値のモデルによる理論値と観測値、および既に推定したパラメータから求めたシフト関数 $\phi_p(t)$ である。ただし、267 ヶ月以降は、266 ヶ月目と同じ値をとるものとした。状態変数方式の HW モデルでは $\phi_p(t)$ の値は CPR 観測値そのものである。QG++ モデルでは $\phi_p(t)$ が全期間で正值を取ればベースラインプリペイメント率の正值性は保証されるが、カリブレーションの結果は 5.5 年目近傍でわずかに負値をとる。しかし、その絶対値は小さく期間も短いので、価格計算に大きな影響はないと考えられる。なお、この 5.5 年付近は金利感応度係数 λ が非常に高い値をとる領域でもあり、金利効果がやや高めに推定された可能性も示唆される。

5.3.3 カリブレーション結果を使用した価格計算

最後に、ベースラインプリペイメント率モデルの違いが価格に与える影響を数値例で示す。

表 1 の MBS 諸元、表 6 の区間分割 QG++ モデルパラメータ、表 7 のベースラインプリペイメント率モデルパラメータ、図 4 の金利感応度カーブを用いて得られた結果を図 9 に示す。図 9 の上図では 5% の連続複利一定を仮定して算出した DF カーブを使用し、下図ではカリブレーション日付 (2012/5/7) の DF カーブを使用した。金利シフトは連続複利ゼロレートを全期間一定の幅で変

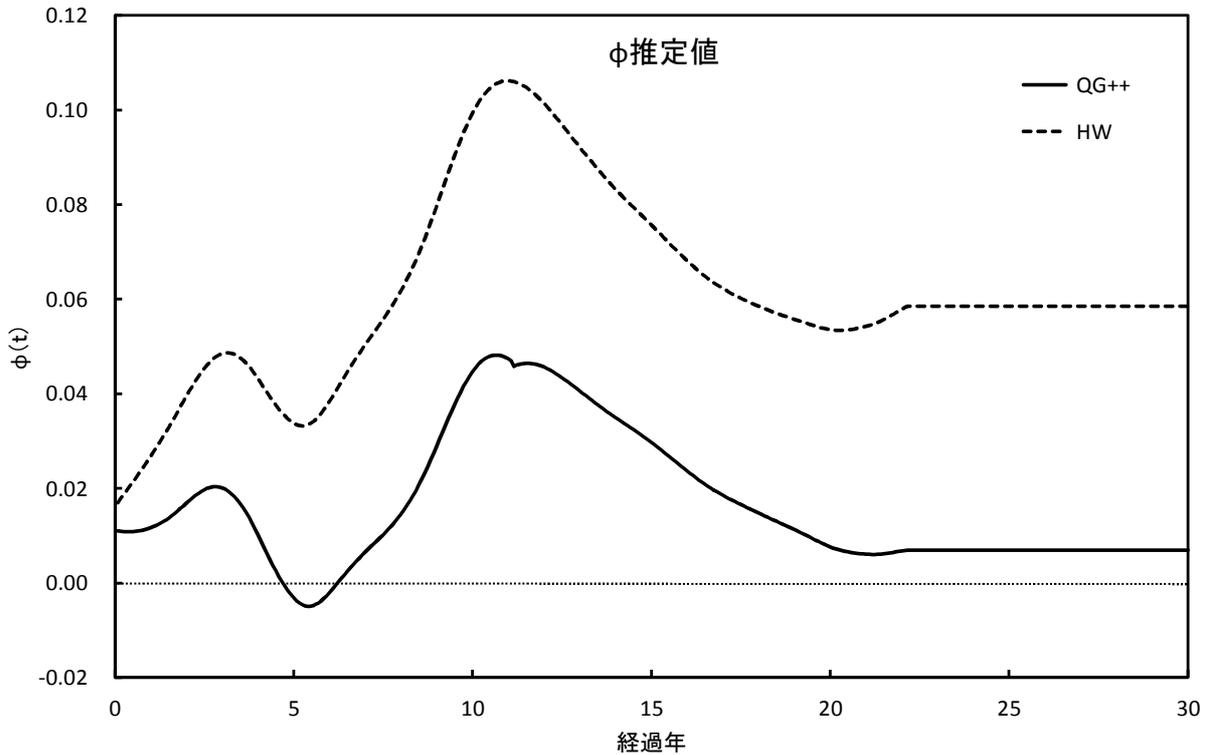


図8 シフト関数の期間構造

化させ、もしも、ゼロレートが負になる場合はフロアー金利 0.001% で置き換えた。図 9 下図において金利減少幅が 0.5% 以下で価格がほとんど変化しなくなるのはフロアー金利に達したためである。また、図 9 上図は発行時点において WAC が 4.5% で 10 年ゼロレートが 5% なので、(10) の右辺第 1 項の金利感応度項の当初の値はゼロである。一方、図 9 下図は 10 年ゼロレートが 0.91% なので、金利感応度項の値はかなり大きい。

図 9 上下図とも QG++ モデルと HW モデルの違いはほとんど無く、相対誤差 1% 未満で一致している。図 9 上図では金利感応度項は主に金利シフトが負の領域で効き、図 9 下図では正の領域で効く設定となっているが、これらのプリペイメントが生起しやすい領域では RMBS の特徴であるネガティブコンベキシティを伴って価格変化が起こっていることが見て取れる。

HW モデルは負のプリペイメント率を生じるモデルであるが、QG++ モデルとほとんど価格に差が無いのは次の理由によると考えられる。ベースラインプリペイメント率 $g(t)$ が価格式に入ってくるのは (12) のみであり、観測確率 P のもとにおける条件付期待値演算子を $E_t^P[\cdot]$ とすると、その効果は

$$E_t^P \left[\exp \left\{ - \int_t^{t_1} g(s) ds \right\} \right] \quad (35)$$

で表現される。ところで我々は $E^P[g(t)]$ と $V^P[g(t)]$ 、すなわち 2 次モーメントまでをカルブレーションにより CPR の観測値に適合させており、その再現性は両モデルともかなり高い (図 7 参照)。そのため、どちらのモデルでも (35) は近い値となり、価格も近い値になったと考えられる。ただし、両モデルの価格は常に一致するわけではなく、CPR 観測値の分散曲線を各モデルがよく再現する場合に限られる。

本稿では負のプリペイメント率の発生を回避する工夫として金利感応度項の非負化とベースラインプリペイメント率の非負化を提案したが、効果としては前者の寄与が大きく、後者に関しては、負

のプリペイメント率が生じるモデルを用いても、カリブレーションを経ることで明確な差が見られないことがあることがわかった。

6 おわりに

本稿では、岸田ら (2013) による期限前償還リスクの期間構造と金利依存性を考慮した RMBS の価格付けモデル (KTM モデル) を発展させて、観測データにより整合的で、プリペイメントの現実に即したモデルを提案した。具体的には、金利依存項が非負になるプリペイメント率モデルを提案し、RMBS 価格の近似式を導出したところ、近似精度は良好で、かつプリペイメントの現実と整合的な RMBS 価格が得られた。さらにベースラインプリペイメント率を QG++ モデルで表現することで、プリペイメント率全体も非負になるモデルも提案し、実際の観測データからモデルパラメータを推定した。得られた結果を用いて RMBS 価格を算出したところ、ある条件のもとでは負のプリペイメント率が生じるモデルを用いても RMBS 価格はあまり変わらなくなることがわかった。金利モデルに関しては、区間分割 QG++ モデルを提案してスワップション価格の近似式を具体的に導出し、スワップションの市場価格からパラメータを推定したところ、KTM モデルに比べてフィッティングは大幅に改善し、パラメータの推定値もより望ましい値になった。これらの改善の結果、市場で観測される金利とプリペイメント率の長期的な変動特性をより正確に反映できる価格付けモデルを構築できた。

本稿のモデルは、金利とプリペイメント率の非負条件をある程度まで満足し、かつ、それらの期間構造を価格に反映することが可能であり、しかも RMBS 価格を解析的に算出できるという望ましい特徴を兼ね備えているので、実務でも十分役に立つと考えられる^{*15}。さらにこのモデルは RMBS だけでなく、将来キャッシュフローに深く関連するリスクファクターが期間構造を持つ商品、例えば中途解約を考慮すべき保険商品などにも広く適用可能である。ただし、パラメータ推定には検討すべき課題が残されており、未だ完全な非負金利・非負プリペイメント率モデルとなるには至っていない。これらの課題の解決と、実際の RMBS の市場価格とプリペイメント率データを併用した実証分析が今後の重要な研究課題である。

付録 A フロアーの価格式

時刻 t における期間 $[T_i, T_{i+1}]$, $t \leq T_i < T_{i+1}$ のフォワード金利を $L(t, T_i, \Delta T_i)$, $\Delta T_i = T_{i+1} - T_i$ とすると、

$$1 + L(T_i, T_i, \Delta T_i)\Delta T_i = \frac{1}{v(T_i, T_{i+1})}$$

なので、フロアレートを K とするフロアレット価格は、

$$\begin{aligned} P_{\text{floorlet}}(t, T_i, T_{i+1}, K) &= E_t^Q \left[e^{-\int_t^{T_{i+1}} r(s)ds} (K - L(T_i, T_i, \Delta T_i))^+ \Delta T_i \right] \\ &= (1 + K\Delta T_i) P_{\text{call}} \left(t, T_i, T_{i+1}, \frac{1}{1 + K\Delta T_i} \right) \end{aligned}$$

と書ける。ただし、 $P_{\text{call}}(t, T, \tau, K)$, $t \leq T \leq \tau$ は満期 τ の割引債の上に書かれた満期 T 、行使価格 K のヨーロピアンコールオプションの時刻 t における価格である。よって、時刻 t における利払時

^{*15} メモリ 2GB, 周波数 2.4GHz の PC で、月払で満期 30 年の RMBS 価格算出は 30 秒未満、金利のカリブレーションは 3 分未満である。

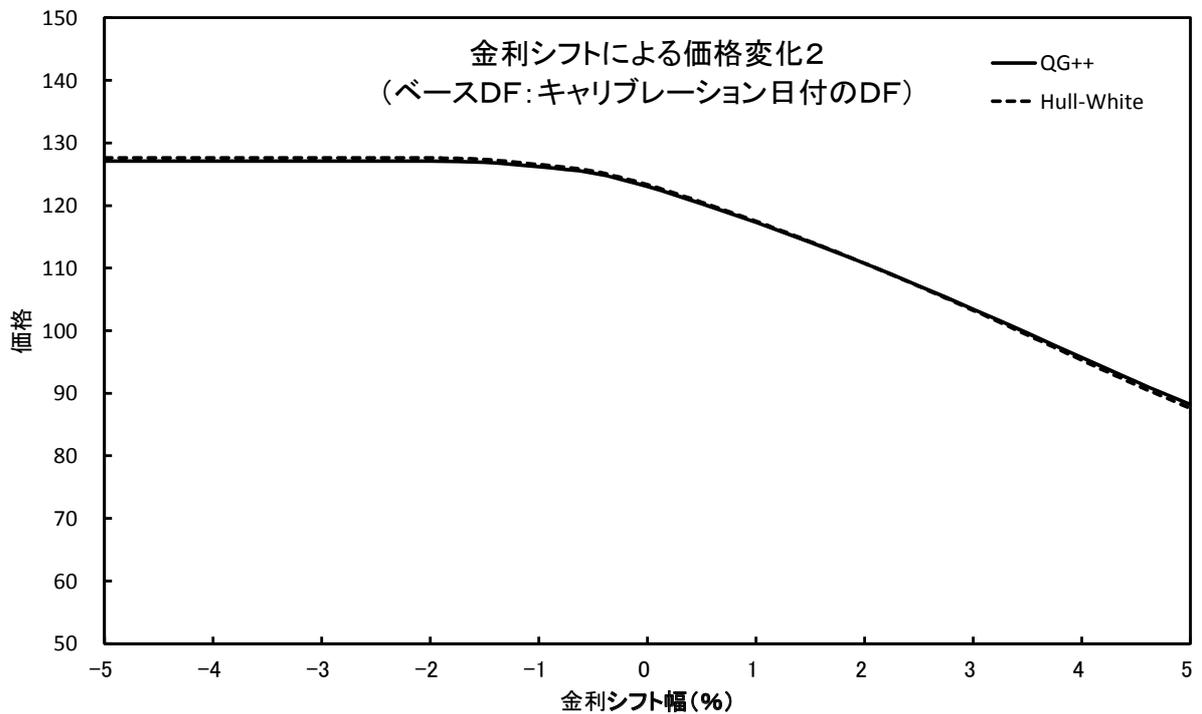
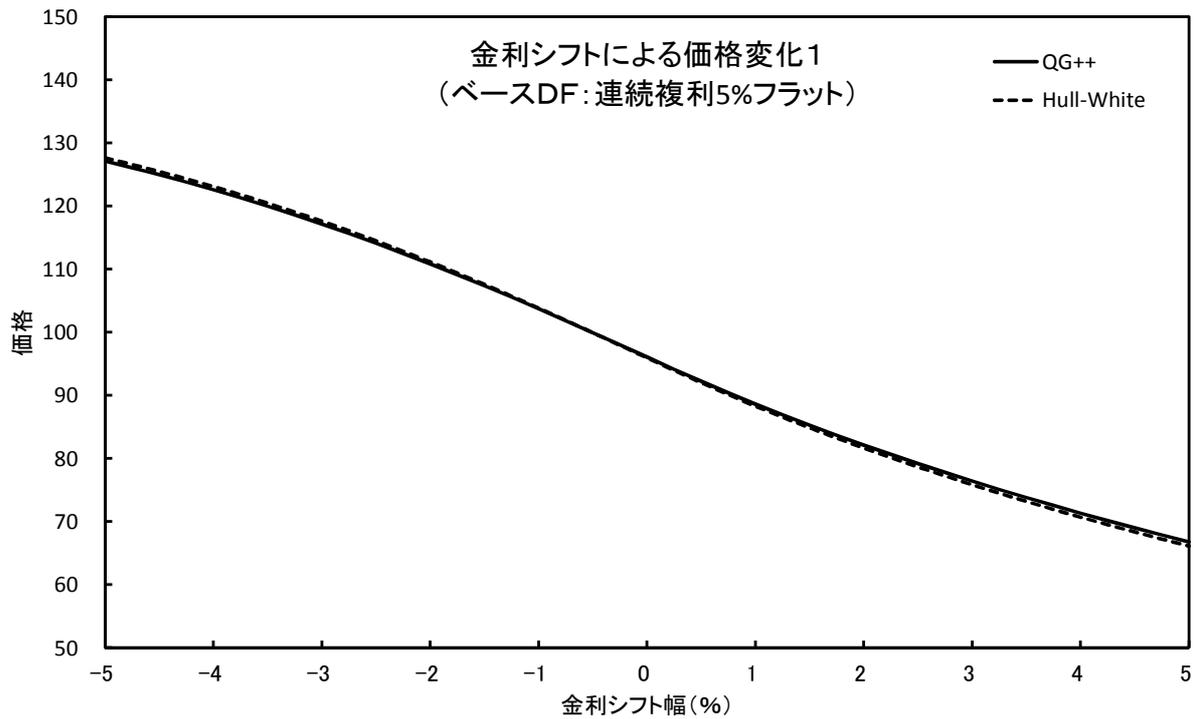


図9 ベースラインプリペイメントモデルの違いによるMBS価格の比較。上図は5%の連続複利一定を仮定して算出したDFカーブを使用。下図はキャリブレーション日付のDFカーブを使用した。金利シフトは連続複利ゼロレートを全期間一定の幅で上下させている。また、ゼロレートが金利シフトの結果負になる場合は最低金利0.001%で置き換えた。

点 T_1, \dots, T_n , フロアレート K のフロア価格 $P_{\text{cap}}(t, \mathbf{T}, K)$ は,

$$P_{\text{cap}}(t, \mathbf{T}, K) = \sum_{i=0}^{n-1} (1 + K\Delta T_i) P_{\text{call}} \left(t, T_i, T_{i+1}, \frac{1}{1 + K\Delta T_i} \right)$$

で与えられる. さらに, Pelsser(1997) より, QG++ モデルによる満期 τ の割引債を原資産とする満期 T , 行使価格 K のヨーロピアンプットオプションの時刻 t における価格は,

$$P_{\text{put}}(t, T, \tau, K, x(t)) = v(t, T; x(t))K \{1 - \Phi(h_1) + \Phi(\ell_1)\} - v(t, \tau; x(t)) \{1 - \Phi(h_2) + \Phi(\ell_2)\}$$

で与えられる. ただし, $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数で,

$$\ell_1 = \frac{\ell(T, \tau, K(T, \tau)) - \mu_x(t, T, x(t))}{\sqrt{\Sigma(t, T)}}, \quad \ell_2 = \frac{\ell(T, \tau, K(T, \tau)) - \frac{\chi(t, T, \tau, x(t))}{\omega(t, T, \tau)}}{\sqrt{\frac{\Sigma(t, T)}{\omega(t, T, \tau)}}}$$

$$h_1 = \frac{h(T, \tau, K(T, \tau)) - \mu_x(t, T, x(t))}{\sqrt{\Sigma(t, T)}}, \quad h_2 = \frac{h(T, \tau, K(T, \tau)) - \frac{\chi(t, T, \tau, x(t))}{\omega(t, T, \tau)}}{\sqrt{\frac{\Sigma(t, T)}{\omega(t, T, \tau)}}}$$

$$\ell(t_1, t_2, a) = \frac{-B_Q(t_1, t_2) - \sqrt{d(t_1, t_2, a)}}{2C_Q(t_1, t_2)}, \quad h(t_1, t_2, a) = \frac{-B_Q(t_1, t_2) + \sqrt{d(t_1, t_2, a)}}{2C_Q(t_1, t_2)}$$

$$K(t, T) = K \exp \left\{ \int_t^T \phi(s) ds \right\}, \quad d(t_1, t_2, a) = B_Q^2(t_1, t_2) + 4C_Q(t_1, t_2) \{A_Q(t_1, t_2) - \log a\}$$

である. $\Sigma(t, T)$, $\mu_x(t, T, x)$, $\omega(t, T, \tau)$, $\chi(t, T, \tau, x)$ は付録 C を, QG++ モデルの A_Q , B_Q , C_Q は岸田ら (2013) を参照. 区間分割 QG++ モデルの A_Q , B_Q , C_Q にはそれぞれ付録 B の D_0 , D_1 , D_2 が対応する.

付録 B 区間分割 QG++ モデルにおける割引債価格式

区間分割 QG++ モデルにおける割引債価格 (26) に含まれる関数 $D_i(t, T, i)$, $i = 0, 1, 2$ は,

$$D_2(t, T, i) = \frac{\gamma_i A_7(t, T, i)}{2\sigma_i^2 A_5(t, T, i)} - \frac{a_i}{2\sigma_i^2} = \frac{A_8(t, i) + A_{10}(t, i)D_2(t_i, T, i+1)}{A_5(t, T, i)}$$

$$D_1(t, T, i) = \frac{2\{\gamma_i D_1(t_i, T, i+1) + B_1(t, T, i)\}}{\gamma_i^2 A_5(t, T, i)}$$

$$D_0(t, T, i) = D_0(t_i, T, i+1) - \sigma_i^2 \left\{ \frac{A_4(t, T, i)}{\gamma_i^5 A_5(t, T, i)} + A_6(t, T, i) \right\} - \alpha_i^2 (t_i - t) - \alpha_i \beta_i (t_i^2 - t^2) - \frac{\beta_i^2}{3} (t_i^3 - t^3)$$

$$+ \frac{\sigma_i^2}{2} \left\{ 4D_1(t_i, T, i+1) \frac{A_{11}(t, i)}{\gamma_i^2 A_5(t, T, i)} + D_1^2(t_i, T, i+1) \frac{A_8(t, i)}{A_5(t, T, i)} \right\}$$

で与えられる. ただし,

$$A_{1a}(t, i) = -e^{\gamma_i(t_i-t)} + 4 - e^{-\gamma_i(t_i-t)}(3 + 2\gamma_i(t_i - t))$$

$$A_{1b}(t, i) = e^{-\gamma_i(t_i-t)} - 4 + e^{\gamma_i(t_i-t)}(3 - 2\gamma_i(t_i - t))$$

$$A_{2a}(t, i) = e^{\gamma_i(t_i-t)}(1 - \gamma_i t_i) - 2(1 - \gamma_i(t + t_i)) + e^{-\gamma_i(t_i-t)}(1 - \gamma_i(2t + t_i) + \gamma_i^2(t^2 - t_i^2))$$

$$A_{2b}(t, i) = e^{-\gamma_i(t_i-t)}(1 + \gamma_i t_i) - 2(1 + \gamma_i(t + t_i)) + e^{\gamma_i(t_i-t)}(1 + \gamma_i(2t + t_i) + \gamma_i^2(t^2 - t_i^2))$$

$$A_{3a}(t, i) = -4\gamma_i t(1 - \gamma_i t_i) - e^{\gamma_i(t_i-t)}(1 - \gamma_i t_i)^2 + e^{-\gamma_i(t_i-t)} \left\{ 1 + 2\gamma_i t - \gamma_i^2(2t^2 + t_i^2) + \frac{2}{3}\gamma_i^3(t^3 - t_i^3) \right\}$$

$$A_{3b}(t, i) = -4\gamma_i t(1 + \gamma_i t_i) + e^{-\gamma_i(t_i-t)}(1 + \gamma_i t_i)^2 - e^{\gamma_i(t_i-t)} \left\{ 1 - 2\gamma_i t - \gamma_i^2(2t^2 + t_i^2) - \frac{2}{3}\gamma_i^3(t^3 - t_i^3) \right\}$$

$$\begin{aligned}
A_4(t, T, i) &= Q_i \{ \alpha_i^2 \gamma_i^2 A_{1b}(t, i) + 2\alpha_i \beta_i \gamma_i A_{2b}(t, i) + \beta_i^2 A_{3b}(t, i) \} \\
&\quad + R_i \{ \alpha_i^2 \gamma_i^2 A_{1a}(t, i) + 2\alpha_i \beta_i \gamma_i A_{2a}(t, i) + \beta_i^2 A_{3a}(t, i) \} \\
A_5(t, T, i) &= Q_i e^{\gamma_i(t_i-t)} + R_i e^{-\gamma_i(t_i-t)} \\
A_6(t, T, i) &= \frac{1}{2\sigma_i^2} \log \left(\frac{A_5(t, T, i)}{2\gamma_i} \right) - \frac{a_i}{2\sigma_i^2} (t_i - t) \\
A_7(t, T, i) &= Q_i e^{\gamma_i(t_i-t)} - R_i e^{-\gamma_i(t_i-t)} \\
A_8(t, i) &= e^{\gamma_i(t_i-t)} - e^{-\gamma_i(t_i-t)} = 2 \sinh(\gamma_i(t_i - t)) \\
A_9(t, i) &= e^{\gamma_i(t_i-t)} + e^{-\gamma_i(t_i-t)} = 2 \cosh(\gamma_i(t_i - t)) \\
A_{10}(t, i) &= (\gamma_i - a_i) e^{\gamma_i(t_i-t)} + (\gamma_i + a_i) e^{-\gamma_i(t_i-t)} = 2\gamma_i \cosh(\gamma_i(t_i - t)) - 2a_i \sinh(\gamma_i(t_i - t)) \\
A_{11}(t, i) &= \gamma_i(\alpha_i + \beta_i t_i) A_9(t, i) - 2\gamma_i(\alpha_i + \beta_i t) - \beta_i A_8(t, i) \\
B_1(t, T, i) &= \alpha_i \gamma_i \left\{ Q_i e^{\gamma_i(t_i-t)} - R_i e^{-\gamma_i(t_i-t)} - (Q_i - R_i) \right\} \\
&\quad + \beta_i \gamma_i \left\{ t(Q_i e^{\gamma_i(t_i-t)} - R_i e^{-\gamma_i(t_i-t)}) - t_i(Q_i - R_i) \right\} + \beta_i \left\{ Q_i e^{\gamma_i(t_i-t)} + R_i e^{-\gamma_i(t_i-t)} - 2\gamma_i \right\} \\
Q_i &= \gamma_i + (a_i + 2\sigma_i^2 D_2(t_i, T, i + 1)) \\
R_i &= \gamma_i - (a_i + 2\sigma_i^2 D_2(t_i, T, i + 1)) \\
\gamma_i &= \sigma_i \sqrt{2H_i} = \sqrt{2\sigma_i^2 + a_i^2}
\end{aligned}$$

である。 $D_j(t_i, T, i + 1)$, $j = 0, 1, 2$ は区間 i の終端 t_i における境界条件で、満期 T を含む区間 $i = q$ では $t_q = T$ を区間終端とみなして (33) を境界条件とすればよい。なお、

$$\Phi(t) \equiv \int_0^t \phi(s) ds$$

を定義すると、 $x(0) = 0$ と (26) より、

$$\Phi(T) = \int_0^T \phi(s) ds = D_0(0, T, 1) - \log P(0, T; 0)$$

なので、

$$P(t, T; x(t)) = \frac{P(0, T; 0)}{P(0, t; 0)} e^{D_0(0, t, 1) - D_0(0, T, 1) + D_0(t, T, p) - D_1(t, T, p)x(t) - D_2(t, T, p)x^2(t)}$$

とも表現できる。

付録 C フォワード中立確率のもとにおける状態変数 $x(T)$ の分布

本節では、スワップション価格の近似式導出のもとになる状態変数 $x(T)$ の分布を導出する。

(4)–(5) を一般化し、リスク中立確率 Q のもとで時刻 t , $0 \leq t \leq T^*$ におけるリスクフリーな瞬間的な短期金利 $r(t)$ が

$$\begin{aligned}
dx(t) &= -a(t)x(t)dt + \sigma(t)dz^Q(t) \\
r(t) &= (x(t) + \nu(t))^2 + \phi(t)
\end{aligned}$$

に従うと仮定する。ただし、 $a(t)$, $\sigma(t)$, $\phi(t)$ は時刻 t の確定的な関数、 $\nu(t)$ は t の一次関数、 $z^Q(t)$ は Q のもとにおける標準ブラウン運動とする。このとき、時刻 t における満期 T の割引債価格

$P(t, T)$, $t \leq T \leq T^*$ が, 確定的な関数 $E_i(t, T)$, $i = 0, 1, 2$ を用いて

$$P(t, T; x(t)) = \exp \left\{ - \int_t^T \phi(s) ds + E_0(t, T) - E_1(t, T)x(t) - E_2(t, T)x^2(t) \right\} \quad (36)$$

と表現できるならば^{*16}, $x(t)$ はフォワード中立確率 P^τ のもとで

$$\begin{aligned} dx(t) &= g(t, x(t))dt + \sigma(t)dz^\tau(t) \\ g(t, x(t)) &= -\sigma^2(t)E_1(t, \tau) - \{a(t) + 2\sigma^2(t)E_2(t, \tau)\}x(t) \end{aligned}$$

に従うので,

$$\begin{aligned} x(T) &= x(t) \exp \left\{ - \int_t^T (a(s) + 2\sigma^2(s)E_2(s, \tau)) ds \right\} \\ &\quad - \int_t^T \sigma^2(s)E_1(s, \tau) \exp \left\{ - \int_s^T (a(v) + 2\sigma^2(v)E_2(v, \tau)) dv \right\} ds \\ &\quad + \int_t^T \sigma(s) \exp \left\{ - \int_s^T (a(v) + 2\sigma^2(v)E_2(v, \tau)) dv \right\} dz^\tau(s), \quad t \leq T \leq \tau \end{aligned} \quad (37)$$

となる. ただし, $z^\tau(t)$ は P^τ における標準ブラウン運動である. (37) より, $x(T)$ は P^τ のもとで期待値 $\mu_x(t, T, \tau; x(t))$, 分散 $\Sigma(t, T, \tau)$ の正規分布に従う. ここで,

$$\begin{aligned} \mu_x(t, T, \tau; x(t)) &\equiv E_t^\tau[x(T)] = x(t)F(t, T, \tau) - I(t, T, \tau) \\ \Sigma(t, T, \tau) &\equiv V_t^\tau[x(T)] = \int_t^T \sigma^2(s)F^2(s, T, \tau) ds \end{aligned} \quad (38)$$

$$F(t, T, \tau) = \exp \left\{ - \int_t^T (a(s) + 2\sigma^2(s)E_2(s, \tau)) ds \right\} \quad (39)$$

$$I(t, T, \tau) = \int_t^T \sigma^2(s)E_1(s, \tau)F(s, T, \tau) ds \quad (40)$$

である. 特に $\tau = T$ の場合を $\mu_x(t, T; x(t)) \equiv \mu_x(t, T, T; x(t))$, $\Sigma(t, T) \equiv \Sigma(t, T, T)$, $F(t, T) \equiv F(t, T, T)$, $I(t, T) \equiv I(t, T, T)$ とおく. フォワード中立確率 P^T と P^τ における $x(T)$ の密度関数をそれぞれ $f^T(z)$, $f^\tau(z)$ とすると, $dP^\tau/dP^T = P(T, \tau)/(P(t, \tau)/P(t, T))$ で, $P(t, \tau)/P(t, T)$ は P^T のもとでマルチンゲールなので,

$$f^\tau(z) = \frac{dP^\tau}{dP^T} f^T(z) = \frac{P(T, \tau; z)}{E_t^T[P(T, \tau; z)]} f^T(z) \quad (41)$$

が成り立つ. ここで (36) を使って $P(T, \tau, z)$ を表して, (41) を具体的に計算すると,

$$f^\tau(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\Sigma(t, T)}{\omega(t, T, \tau)}}} \exp \left\{ - \frac{\left(z - \frac{\chi(t, T, \tau, x(t))}{\omega(t, T, \tau)} \right)^2}{2 \frac{\Sigma(t, T)}{\omega(t, T, \tau)}} \right\} \quad (42)$$

$$\omega(t, T, \tau) = 1 + 2E_2(T, \tau)\Sigma(t, T) \quad (43)$$

$$\chi(t, T, \tau, x(t)) = \mu_x(t, T, x(t)) - E_1(T, \tau)\Sigma(t, T) \quad (44)$$

^{*16} 4.1 節より, 本稿の QG++ モデルと区間分割 QG++ モデルはこの条件を満たしている.

が得られる。(42)より、確率測度 P^τ のもとで $x(T)$ は平均 $\mu_x(t, T, \tau; x(t))$, 分散 $\Sigma(t, T, \tau)$ の正規分布に従う。ただし、

$$\mu_x(t, T, \tau; x(t)) = E_t^\tau[x(T)] = \frac{\chi(t, T, \tau, x(t))}{\omega(t, T, \tau)} \quad (45)$$

$$\Sigma(t, T, \tau) = V_t^\tau[x(T)] = \frac{\Sigma(t, T)}{\omega(t, T, \tau)} \quad (46)$$

である。

C.1 QG++ モデル

QG++ モデルは $a(t) = a$, $\sigma(t) = \sigma$, $\nu(t) = \alpha + \beta t$ (a, σ, α, β は定数) とした場合である。このとき、 $E_0(t, T) = A_Q(t, T)$, $E_1(t, T) = B_Q(t, T)$, $E_2(t, T) = C_Q(t, T)$ であり、

$$I(t, T) = \sigma^2 \left[\frac{B_Q(t, T)}{F(t, T)} C_Q(t, T) + \frac{\alpha}{\gamma^2} (2 - A_9(t, T)) + \frac{\beta}{\gamma^2} (2T - tA_9(t, T)) - \frac{\beta}{\gamma^3} A_8(t, T) \right]$$

$$\Sigma(t, T) = \sigma^2 C_Q(t, T)$$

が得られる。これらと (43)–(46) より $\mu_x(t, T, \tau; x(t))$ と $\Sigma(t, T, \tau)$ が得られる。

C.2 区間分割 QG++ モデル

4節の設定による区間分割 QG++ モデルを考えると、 $t \in [t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, \dots, m$ において $E_0(t, T) = D_0(t, T, i)$, $E_1(t, T) = D_1(t, T, i)$, $E_2(t, T) = D_2(t, T, i)$ である。(39)の $F(t, T, \tau)$ の引数 t, T, τ を含む区間をそれぞれ k_t, k_T, k_τ , すなわち $t \in [t_{k_t-1}, t_{k_t})$, $T \in (t_{k_T-1}, t_{k_T}]$, $\tau \in (t_{k_\tau-1}, t_{k_\tau}]$ とすると、 $D_n(t, T, i)$, $n = 0, 1, 2$, $i < k_\tau$ は τ に境界条件を通してしか依存しない。このため、(38)–(40)の時間積分は容易に計算できて、特に $\tau = T$ のときの結果のみ示すと、

$$F(t, T) = \frac{2\gamma_{k_t} J(k_t, T)}{A_5(t, t_{k_t}, k_t)}$$

$$I(t, T) = \sigma_{k_t}^2 D_1(t, T, k_t) J(k_t, T) \frac{A_8(t, t_{k_t}, k_t)}{A_5(t, t_{k_t}, k_t)} + \sum_{j=k_t+1}^{k_T-1} \sigma_j^2 D_1(t_j, T, j) J(i, T) \frac{A_8(t_{j-1}, t_j, j)}{A_5(t_{j-1}, t_j, j)}$$

$$+ \frac{4\sigma_{k_t}^2}{\gamma_{k_t}} J(k_t, T) I_B(t, t_{k_t}, k_t) + \sum_{j=k_t+1}^{k_T-1} \frac{4\sigma_j^2}{\gamma_j} J(j, T) I_B(t_{i-1}, t_i, j) + \frac{4\sigma_{k_T}^2}{\gamma_{k_T}} I_B(t_{k_T-1}, T, k_T)$$

$$\Sigma(t, T) = \sigma_{k_t}^2 J^2(k_t, T) \frac{A_8(t, t_{k_t}, k_t)}{A_5(t, t_{k_t}, k_t)} + \sum_{j=k_t+1}^{k_T-1} \sigma_j^2 J^2(j, T) \frac{A_8(t_{j-1}, t_j, j)}{A_5(t_{j-1}, t_j, j)} + \sigma_{k_T}^2 C_Q(t, T, k_T)$$

$$J(i, T) = \left(\prod_{j=i+1}^{k_T-1} \frac{2\gamma_j}{A_5(t_{j-1}, t_j, j)} \right) \frac{2\gamma_{k_T}}{A_5(t_{k_T-1}, T, k_T)}$$

$$I_B(t, T, i) = \frac{(\alpha_i + \beta_i T) A_9(t, T, i) - 2(\alpha_i + \beta_i t) - \beta_i A_8(t, T, i) / \gamma_i}{2A_5(t, T, i)}$$

で与えられる。ただし、 $C_Q(t, T, i)$ は区間 i のパラメータを使って定義される $C_Q(t, T)$ である。これらと (43)–(46) より $\mu_x(t, T, \tau; x(t))$ と $\Sigma(t, T, \tau)$ が得られる。

付録 D スワップション価格の近似式

Piterbarg(2009) は、スワップ測度 P^A のもとで QG モデルの潜在変数 $x(t)$ が混合正規分布に従うことを用いてスワップション価格の厳密解を導出した。しかし、具体的に価格を得るにはモンテカルロ法が必要になるため、彼はスワップレートを $x(t)$ で Taylor 展開して低次の項までで近似し、さらに $x(t)$ が正規分布に従うとみなしてスワップション価格の近似式を導出した。

時刻 t における時刻 T_0 スタート、 T_N 満期のフォワードスワップレート $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{v(t, T_0) - v(t, T_N)}{A(t)}, \quad A(t) = \sum_{i=1}^N \delta_i v(t, T_i)$$

で表現される。ただし、 $T_i, i = 1, \dots, N$ は利払日で、 $\delta_i = T_i - T_{i-1}$ である。 $A(t)$ をニューメレールとする相対価格がマルチンゲールになるスワップ測度 P^A を用いると、時刻 $t = 0$ における行使価格 K のペイヤーズ・スワップションの価格は

$$P_{\text{swptn}}(0, T_0, K; x(T_0)) = A(0)E^A [(S(T_0, x(T_0)) - K)^+]$$

と書ける。ただし、 $E^A[\cdot]$ はスワップ測度 P^A のもとにおける期待値演算子である。ここで、本来は確率測度 P^A のもとで混合正規分布に従う $x(T_0)$ を、同じ平均 $E^A[x(T_0)]$ と分散 $V^A[x(T_0)]$ をもつ正規分布に従うものとして近似すると、その密度関数は

$$\begin{aligned} \psi^A(x) &\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi V^A[x(T_0)]}} \exp \left\{ -\frac{(x - E^A[x(T_0)])^2}{2V^A[x(T_0)]} \right\} \quad (47) \\ E^A[x(T_0)] &= \sum_{i=1}^N w_i^A E^{T_i}[x(T_0)] \\ V^A[x(T_0)] &= \sum_{i=1}^N w_i^A (V^{T_i}[x(T_0)] + (E^{T_i}[x(T_0)])^2) \\ w_i^A &= \frac{\delta_i P(0, T_i)}{A(0)}, \quad i = 1, \dots, N \\ E^{T_i}[x(T_0)] &= \frac{\chi(0, T_0, T_i, 0)}{\omega(0, T_0, T_i)} \\ V^{T_i}[x(T_0)] &= \frac{\Sigma(0, T_0)}{\omega(0, T_0, T_i)} \end{aligned}$$

で与えられる。 $\chi(0, T_0, T_i, 0)$, $\Sigma(0, T_0)$, $\omega(0, T_0, T_i)$ の導出過程と、具体的なモデルにおけるそれらの表現は付録 C を参照されたい。このときスワップション価格の近似式は、Taylor 展開の一次近似を使うと

$$P_{\text{swptn}}(0, T_0, K; x(T_0)) = A(0)S'(T_0, \bar{x})OPT_{\text{call}} \left(K_1, E^A[x(T_0)], \sqrt{V^A[x(T_0)]} \right)$$

二次項までの近似を使うと

$$P_{\text{swptn}}(0, T_0, K; x(T_0)) = A(0)I(\gamma, \delta, K_2)$$

で与えられる。ただし、 $\phi(\cdot), \Phi(\cdot)$ はそれぞれ標準正規分布の密度関数と分布関数で、

$$\begin{aligned}
OPT_{\text{call}}(K, a, b) &= b\phi\left(\frac{K-a}{b}\right) + (a-K)\left(1 - \Phi\left(\frac{K-a}{b}\right)\right) \\
I(a, b, c) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax^2 + bx - c)^+ \psi^A(x) dx \\
K_1 &= E^A[x(T_0)] - \frac{S(0, x(0)) - K}{S'(T_0, \bar{x})} \\
K_2 &= K - S(0, x(0)) + \frac{1}{2}S''(T_0, \bar{x})E^A[x^2(T_0)] \\
&\quad + S'(T_0, \bar{x})E^A[x(T_0)] - S''(T_0, \bar{x})(E^A[x(T_0)])^2 \\
\gamma &= \sqrt{2\sigma^2 + a^2} \\
\delta &= S'(T_0, \bar{x}) - S''(T_0, \bar{x})E^A[x(T_0)] \\
S'(T_0, x) &= \frac{dS(T_0, x)}{dx} = -\frac{v'_{0,N} \sum_{i=1}^N \delta_i v_{0,i} + (1 - v_{0,N}) \sum_{i=1}^N \delta_i v'_{0,i}}{A_0^2} \\
S''(T_0, x) &= \frac{d^2S(T_0, x)}{dx^2} = -\frac{v''_{0,N} A_0 - 2v'_{0,N} A'_0 + (1 - v_{0,N}) A''_0}{A_0^2} + \frac{2(A'_0)^2(1 - v_{0,N})}{A_0^3} \\
A_0 &= A(T_0, x(T_0)) = \sum_{j=1}^N \delta_j v_{0,j} \\
A'_0 &= \frac{dA(T_0, x(T_0))}{dx} = \sum_{j=1}^N \delta_j v'_{0,j} \\
A''_0 &= \frac{d^2A(T_0, x(T_0))}{dx^2} = \sum_{j=1}^N \delta_j v''_{0,j} \\
v_{j,i} &= v(T_j, T_i; x(T_j)) \\
v'_{j,i} &= \frac{dv(T_j, T_i; x(T_j))}{dx} = -(B_Q(T_0, T_i) + 2C_Q(T_0, T_i)x)v_{j,i} \\
v''_{j,i} &= \frac{d^2v(T_j, T_i; x(T_j))}{dx^2} = \left[(B_Q(t_0, T_i) + 2C_Q(T_0, T_i)x)^2 - 2C_Q(T_0, T_i) \right] v_{j,i}
\end{aligned}$$

である。 $OPT_{\text{call}}(K, a, b)$ は原資産価格が正規分布 $N(a, b^2)$ に従うときのコールオプション価格で、(47) の近似を使えば $I(a, b, c)$ も $\phi(\cdot)$ と $\Phi(\cdot)$ を使って表現できる。

謝辞

本稿の内容は株式会社エイファス主催の研究会の成果の一部である。株式会社エイファスの 田中 徹 氏 (現在 株式会社 AFG) には共同研究の機会を与えていただいたことに感謝する。また、株式会社エイファスのおお津 昌三 氏には共同研究を継続していただいたことに厚く感謝する。また、著者の一人である室町は日本学術振興会より科学研究費補助金基盤研究 (A) No.26242028 と (C) No.24510194 の支援を受けたことに感謝する。

参考文献

- [1] Brigo, D. and F. Mercurio (2006), *Interest Rate Models – Theory and Practice with Smile, Inflation and Credit*, Springer-Verlag, 2nd Edition.

- [2] Collin-Dufresne, P. and J.P. Harding (1999), “A closed form formula for valuing mortgages,” *Journal of Real Estate Finance and Economics*, **19** (2), 133–146.
- [3] Hull, J. C. (2012), *Options, Futures, And Other Derivatives*, Pearson Education Limited, 8th Edition.
- [4] Hull, J. and A. White (1990), “Pricing interest-rate-derivative securities.,” *Review of Financial Studies*, **3**, 573–592.
- [5] Hutchinson, M. F. (1986), “Algorithm 642: A fast procedure for calculating minimum cross-validation cubic smoothing splines,” *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, **12** (2), 150–153.
- [6] Kijima, M. and Y. Muromachi (2000), “Evaluation of credit risk of a portfolio with stochastic interest rate and default processes,” *Journal of Risk*, **3**, 5–36.
- [7] Kijima, M., Y. Suzuki and Y. Tamba (2014), “Risk evaluation of mortgage-loan portfolios in a low interest rate environment,” *Journal of Risk*, **16**(5), 3–37.
- [8] Kijima, M., K. Tanaka and T. Wong (2009), “Yield Spread Options under the DLG Model,” in *Modelling Interest Rates*, Risk Books, 43–71.
- [9] 岸田則生, 高山靖敏, 室町幸雄 (2013), 「期限前償還リスクの期間構造と金利依存性を考慮した RMBS の価格付け」, 『日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌』, **56**, 53–75.
- [10] Kolbe, A. (2007), *Valuation of Mortgage Products with Stochastic Prepayment-Intensity Models*, Doctoral Dissertation, Technische Universität München.
- [11] 室町幸雄 (2007), 『信用リスク計測と CDO の価格付け』, 朝倉書店.
- [12] 日本証券業協会 (2006), 『PSJ(Prepayment Standard Japan) モデルに関する説明会資料』.
- [13] 日本証券業協会, 全国銀行協会 (2014), 『証券化市場の動向調査のとりまとめ ～2013 年度の発行動向～』.
- [14] Pelsser, A. (1997), “A tractable yield-curve model that guarantees positive interest rates,” *Review of Derivatives Research*, **1**, 269–284.
- [15] Piterbarg, V. (2009), “Rates squared,” *Risk*, **January**, 100–105.
- [16] Rom-Poulsen, N. (2007), “Semi-analytical MBS pricing,” *Journal of Real Estate Finance and Economics*, **34**, 463–498.
- [17] 志立正弘 (2004), 「金利低下時における住宅ローン期限前返済率の変動特性についてーローン設定からの経過月数との関連性に着目してー」, 『ニッセイ基礎研究所報』, **32**, 48–77.
- [18] 新生証券 (2009), 『新生銀行住宅ローン プリペイメントモデル (第 1 版)』.
- [19] Tanaka, K., T. Yamada and T. Watanabe (2010), “Applications of Gram-Charlier Expansion and Bond Moments for Pricing of Interest Rates and Credit Risk,” *Quantitative Finance*, **10**(6), 645–662.
- [20] 山寄輝 (2005), 「住宅ローン債権担保証券のプライシング手法について：期限前償還リスクを持つ金融商品の価格の算出」, 『金融研究』, **24**, 別冊 2 (2005), 57–113.