

平成 29 年度

首都大学東京大学院社会科学研究所

経営学専攻博士前期（修士）課程

（高度金融専門人材養成プログラム）

入学試験問題（前期）

試験科目：ファイナンス

平成 28 年 9 月 10 日（土）

時間：13:00～14:30

注意事項

- ① 問題は、開始の合図があるまで、開いてはいけません。
- ② 本冊子の問題は全員に共通で、問題 1 から問題 4 まであります。
- ③ 答案用紙には、受験番号、氏名を記入してください。また、答案用紙は裏表とも使用してください。
- ④ 解答は結果だけでなく、途中経過や考え方がわかるように考えて書いてください。
- ⑤ 試験開始後、受験者の写真照合を行いますのでご協力ください。
- ⑥ 試験開始後 60 分以内は、退場できません。
- ⑦ 下書き用紙の内容は、一切採点の対象になりません。
- ⑧ 問題、答案用紙、下書き用紙は、試験終了後に回収します。

問題 1. 次に挙げる用語のいずれかについて、最大 200 字程度で極力簡潔に説明しなさい。
なお数式や図を用いても構わないが、文字数には含めません。

- (1) ブラウン運動 (ウィーナー過程)
- (2) リスク中立 (同値マルチンゲール) 確率測度
- (3) CAPM (Capital Asset Pricing Model, 資本資産価格理論)

問題 2. 以下の問いのいずれか一方を選択し答えなさい。

1. 株式 a の株価収益率 (以下, リターンと呼ぶ) r_a は確率変数で, 平均を μ_a , 分散を σ_a^2 とする. 株式 b のリターン r_b も確率変数で, 平均を μ_b , 分散を σ_b^2 とする. r_a と r_b の共分散を σ_{ab} とおく. $\mu_a, \mu_b, \sigma_a, \sigma_b, \sigma_{ab}$ はいずれも正の定数である.

ある投資家がこの 2 つの株式に投資するポートフォリオを考えている. 期初における株式 a と株式 b への投資比率 (空売りもできるものとする) をそれぞれ x_a と x_b で表す. ただし, $x_a + x_b = 1$ である. この前提から, 期末におけるポートフォリオのリターン $r_p = x_a r_a + x_b r_b$ もまた確率変数である. r_p の平均と分散をそれぞれ μ_p と σ_p^2 とおく.

この投資家は以下の効用 U を持つものとする.

$$U = \mu_p - \frac{1}{2}\sigma_p^2$$

$\mu_a, \mu_b, \sigma_a, \sigma_b, \sigma_{ab}$ を用いて, 効用を最大にする株式 a への投資比率 x_a^* を表しなさい.

2. 元本 F , 満期 T のリスクのないゼロ・クーポン債を考え, この債券の $t = 0$ における価格を P とする. このとき, 以下の問いに答えなさい.

(1) 年 m 回複利の最終利回り (年率) を Y_m とするとき, P と Y_m との関係式を導きなさい. ただし, 年率 y の年 m 回複利とは, $1/m$ 年ごとに元本 F 及びそれまでの累積利子を合わせた額 G に対して, $G \times \frac{y}{m}$ の金利が付与されることを意味する.

(2) 前問の結果において, $m \rightarrow \infty$ とすることで, P と連続複利の最終利回り (年率) Y_c との関係式を導きなさい. ただし $Y_c = \lim_{m \rightarrow \infty} Y_m$ とし, また

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

を用いてもよい.

問題 3. 以下の問いに全て答えなさい。

1. パラメータ $\lambda > 0$ のポアソン分布の確率関数 X は

$$p_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

で与えられる. X_1 と X_2 がそれぞれパラメータ $\lambda_1 > 0$ と $\lambda_2 > 0$ のポアソン分布に従う独立な確率変数であるとき, その和 $Y = X_1 + X_2$ がパラメータ $\lambda_1 + \lambda_2$ のポアソン分布に従うことを示しなさい.

2. 次の 2 変数関数

$$f(x, y) = e^x \log(1 + y)$$

を点 $(0, 0)$ のまわりでテイラー展開 (すなわちマクローリン展開) して 3 次項まで求めなさい. なお, 高次の残差項は R で示しなさい.

3. 次の連立微分方程式を考える.

$$\begin{cases} \frac{dB(t)}{dt} = r(t)B(t) \\ \frac{dr(t)}{dt} = a(m - r(t)) \end{cases}$$

ただし, $B(0) = 1, r(0) = r_0$ で a, m, r_0 は正の定数とする. このとき,

(1) $r(t), t \geq 0$ を求めなさい.

(2) $B(t), t \geq 0$ を求めなさい.

問題 4. 税金や取引コスト・倒産コスト等の摩擦が無く, 空売り等に関する取引制約もない市場の下で, 次の企業 1 と企業 2 を考える. これらの 2 つの企業は共に事業資産 A を保有しており, これが保有する資産のすべてであるとする. ただし, 事業資産 A は時点 $t = 0$ において $X_0 = 100$ で取引されており, 時点 $t = 1$ では確率 p で $X_1 = 130$ となり, 確率 $1 - p$ で $X_1 = 50$ となるとする. また, 企業 1 は 100% 自己の株式で資金調達を行っているのに対し, 企業 2 は株式に加え満期 1 年, 額面 $F = 80$, クーポンレート $R = 10\%$ (年 1 回払) の利付債を発行している. さらに, 満期 1 年, 額面 $B_1 = 100$ でクーポンのない割引国債が $B_0 = 96$ で取引されており, また株式の配当はないものとする.

このとき, 以下の問いに答えなさい.

(1) 企業 1 の $t = 0$ における株式価値を求めなさい.

(2) 企業 1 と企業 2 の $t = 0$ における企業価値を求めなさい.

(3) 企業 2 の $t = 1$ における負債価値と株式価値を求めなさい.

(4) 企業 1 の株式及び割引国債を用いた複製戦略を考えることで, 企業 2 の $t = 0$ における負債価値と株式価値を求めなさい.