問題 **1**　以下の問いに答えなさい．

(1) パラメータ λ の指数分布の密度関数は

$$f(x) = 1_{\{x \geq 0\}} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

で与えられる．ただし，1_A は定義関数で，事象 A が真ならば 1，偽ならば 0 である．この分布に従う確率変数 X の平均 $E[X]$ と分散 $V[X]$ を求めなさい．

(2) x, y は微小であるとして，次の **2** 変数関数

$$f(x, y) = \log(1 + \alpha x + \beta y)$$

を点 $(0, 0)$ のまわりでテーラー展開して **2** 次項までの近似式を求めなさい．さらに，y^2 が x と同位の無限小であるとき，x の一次より高次のオーダーの項を無視した近似式を求めなさい．ただし，a が b と同位の無限小とは，

$$\lim_{b \to 0} \frac{a}{b} = c$$

となる定数 $c \neq 0$ が存在することをいう．

(3) 次の微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = a(m - r(t)), \qquad r(0) = r_0$$

を解き，$r(t),\, t \geq 0$ を求めなさい．ただし，$a > 0,\, m,\, r_0$ は定数とする．

問題 2　満期 n 年（n は自然数）で年 **1** 回，固定金利と変動金利（**LIBOR** を想定）を交換する金利スワップを考える．ただし，**LIBOR**-スワップ市場の割引関数は一意に定まるものとし，昨今のようなマルチカーブ環境やスワップ契約のデフォルトは考えないものとする．また，実務とは違い，複雑なデイカウントは考えず，利払間隔は単純に年単位で扱い，契約は即日開始するものとする．

想定元本は 1 円とする．時刻を t（年）で表し，現時点を $t=0$，利払日を $t_i=i,\ i=1,\cdots,n$ として，$t_0=0$ とする．また，時刻 $t_i,\ i=0,1,\cdots,n$ に決まる期間 **1** 年の変動金利（**LIBOR**）を $L(t_i)$ で表し，現時点で市場で観測されるスワップレート（固定金利）を S_n で表す．現時点で契約する金利スワップの，時刻 $t_i,\ i=1,\cdots,n$ におけるキャッシュフローは固定金利 S_n と変動金利 $L(t_{i-1})$ の交換で，$t_0=0$（現時点）におけるキャッシュフローはゼロである．また，現時点における **LIBOR**-スワップ市場における満期 t の割引関数（額面 **1** 円の無リスクな割引債の価格）を $D(t)$ で表し，以下の **(1)** から **(3)** では $D(t)$ は既知とする．

(1) この金利スワップの固定金利受けの現在価値 V_S を求めなさい．

(2) この金利スワップの変動金利受けの現在価値 V_L を求めなさい．

(3) スワップレート S_n を，割引関数 $D(t),\ t\geq 0$ を用いて表現しなさい．

(4) ここでは割引関数 $D(t),\ t>0$ は未知であるとする．市場のスワップレート $S_n,\ n=1,\cdots,m$ が観測されているとき，$D(t_i),\ i=1,\cdots,m$ を手前から順（$D(0)=1$ は既知として，$D(1),\ D(2),\cdots$ の順）に求めていく方法を説明しなさい．

問題 3　無リスク資産と株式 **1** 銘柄からなる完全市場で，デリバティブの無裁定価格を二項モデルを用いて考える．時刻を t で表し，現在は $t=0$，時刻 t の株価を $S(t)$ とし，$S(0)=S$，$t=1$ では確率 p で $S(1)=uS$，確率 $1-p$ で $S(1)=dS$ になる．一方，無リスク資産の価格は $t=0$ で 1，$t=1$ で確実に $1+r$ になる．ただし，$0<d<1+r<u$，$0<p<1$，$S>0$ とし，S, p, u, d, r はすべて定数とし，株式の配当はないものとする．

(1) この株式を原資産とする満期 $t=1$ のオプションを考える．$t=1$ で株価 $S(1)$ のときのペイオフを $P(S(1))$ と表現する（ペイオフ関数を $P(\cdot)$ で表す）．オプションの複製ポートフォリオが株式 Δ 単位，無リスク資産 B 単位からなるとき，Δ と B を求め，$t=0$ におけるオプション価格 V_0 を求めなさい．

(2) $q=(1+r-d)/(u-d)$ を株価の上昇確率，$1-q$ を下落確率とみなすことができて，これらはリスク中立確率と呼ばれている．これらの確率で株価の上昇と下落が起こるとき，オプションの期待収益率 μ_o^q を求めなさい．

(3) 満期 $t=1$，行使価格 K のヨーロピアンコールオプションの $t=0$ における価格 C_0 と，同じ満期と行使価格をもつヨーロピアンプットオプションの $t=0$ における価格 P_0 を，**(1)** の結果に基づいて求めなさい．

(4) **(3)** の結果をもとにして，C_0-P_0 を求めなさい．また，ここで得られた関係式は何と呼ばれているか，名称を書きなさい．