平成30年度
首都大学東京大学院経営学研究科
経営学専攻博士前期課程
（ファイナンスプログラム）
入学試験問題（一般選抜前期）

平成29年9月2日（土）　13:00 ～ 14:30

試験科目：ファイナンス

注意事項

① 問題は，開始の合図があるまで，開かないこと。
② 答案用紙には，受験番号，氏名を書き，選択した科目名を明記すること。
③ 数式・記号等以外は日本語で答案を作成すること。
④ 答案用紙は表だけを使用すること。裏は使わないこと。
⑤ 答案用紙が不足する場合は監督員に請求すること。答案が二枚以上にわたるときは，答案用紙の下端にページ数（1，2，・・・）を記入すること。
⑥ 試験終了時には，問題・答案用紙・下書き用紙を机のうえに置き，監督者の指示があるまで着席していること。
⑦ 問題の印刷不明瞭，落丁・乱丁などに気が付いた場合には，ただちに監督者に知らせること。
⑧ 試験開始後30分以内は，退場できません。
⑨ 問題，答案用紙，下書き用紙は，試験終了後回収します。
⑩ 下書き用紙の内容は，一切採点の対象になりません。
⑪ 本冊子の問題は全員に共通で，問題は1から4まであります。
⑫ 答案用紙には，結果だけではなく，途中経過や考え方がわかるように解答すること。

ファイナンス

1. 次の３つのうちいずれか１つを選び答えなさい。

1. 次の２変数関数
$$f(x,y) = e^{ax}\cos(by)$$
を点 $(0,0)$ のまわりでテイラー展開 (すなわちマクローリン展開) して２次項まで求めなさい。ただし, a,b は定数とする。なお, 高次の残差項は R で示しなさい。

2. パラメータ μ 及び $\sigma > 0$ の正規分布 $N(\mu,\sigma)$ の密度関数は
$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
で与えられる。今，ある確率変数 Y について，$X = \ln Y$ が $N(\mu,\sigma)$ に従う時，Y の期待値 $E[Y]$ を求めなさい。ただし，任意の μ 及び $\sigma > 0$ に対して
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\mu,\sigma)dx = 1$$
となることを用いてもよい。

3. x の関数 y についての２階常微分方程式
$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0$$
に対して，α,β を定数とする以下の２次方程式
$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$$
を特性方程式という。この特性方程式が２つの実数解 λ_1 と λ_2 をもつとき，この微分方程式の解は
$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$$
で与えられることを示しなさい。ただし，C_1 と C_2 は任意の定数とする。

2. 次の確率微分方程式を満たす 2 つの資産の価格を考える。

$$dX_i(t) = \mu_i X_i(t)dt + \sigma_i X_i(t)dW_i(t), \quad i = 1, 2$$

ただし，μ_i, σ_i は定数とする。$W_i(t)$ は標準ブラウン運動であり，次のような相関をもつとする。

$$dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$$

ただし，$-1 \leq \rho \leq 1$ とする。A と m が定数のとき，伊藤の公式を用いて，次の式が従う確率微分方程式をすべて導きなさい。

1. $f_1(X_1(t)) = AX_1(t)$
2. $f_2(X_1(t)) = (X_1(t))^m$
3. $f_3(X_1(t), X_2(t)) = X_1(t)/X_2(t)$

3. 無リスク資産及びリスクのある株式1銘柄が存在する裁定機会のない市場において，$t=0,1$ の2時点のみからなる株価の二項モデルを用いて株式を原資産とするヨーロピアン・デリバティブの無裁定価格を考える。以下 $t=0$ を現時点，$t=1$ をデリバティブの満期とする。株価は $t=0$ で S であり，$t=1$ では確率 p で u 倍，すなわち Su の値を取り（これを上昇と呼ぶ），確率 $1-p$ で d 倍，すなわち Sd の値を取る（これを下落と呼ぶ)。一方，無リスク資産は $t=0$ で1，$t=1$ では確率1で $1+r$ になるものとする。ただし，S,p,u,d,r は全て定数，$u>d$, $S>0$, $0<p<1$ とし，株式の配当はないものとする。このとき，以下の4つの問いにすべて答えなさい。

1. 株式と無リスク資産を用いた裁定機会が存在しないために，d,u,r が満たすべき条件を導きなさい。

2. $t=1$ に満期を迎えるデリバティブが，株価上昇時に f_u，株価下落時に f_d というペイオフを持つことがわかっているとする。このとき，このデリバティブの $t=1$ でのペイオフを複製するポートフォリオを株式 x 単位，無リスク資産 y 単位から構成したい。この x,y を求め，さらに $t=0$ におけるデリバティブ価格 f_0 を求めなさい。

3. 前問の結果を用いて，満期 $t=1$，行使価格 $K=S(1+r)$ のヨーロピアン・コールオプションの $t=0$ における価格 C を求めなさい。

4. この問題におけるリスク中立確率 q（上昇に対応する確率を q とする）を求め，この q が $0<q<1$ を満たすための条件を示しなさい。

4. (x_i, y_i) という 2 変数の値の組を $i = 1, \ldots, n$ について観測した。以下の線形回帰モデルを考える。

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i;\ i = 1, \ldots, n$$

α と β は切片項と回帰係数をそれぞれ表し，ε_i は回帰の残差を表す。以下を残差平方和という。

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2$$

この残差平方和を最小にする $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ はそれぞれ以下で与えられることを示しなさい。

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} \\ \hat{\beta} &= \frac{\mathrm{Cov}(x, y)}{\mathrm{Var}(x)} \end{aligned}$$

ただし，$\bar{y}$ と $\bar{x}$ はそれぞれ $y = (y_1, \ldots, y_n)$ と $x = (x_1, \ldots, x_n)$ の平均を表し，$\mathrm{Cov}(x, y)$ は x と y の共分散，$\mathrm{Var}(x)$ は x の分散を表す。