1 ファクター・ガウシアンコピュラモデルに基づく信用リスクの分析

学修番号 24838306　三宅弘輝

2026 年 3 月 7 日（土）東京都立大学大学院ファイナンスプログラム 2025 年度研究発表会

東京都立大学　大学院経営学研究科 ファイナンスプログラム

目次

はじめに

研究の動機

- 金融機関の信用リスク管理においては，債権ポートフォリオのデフォルトリスク，その背後にあるデフォルト損失額の分布を捕捉することが重要
- 既存の信用リスク評価モデルでどの程度現実のデフォルトデータの特性を表現できるかを知りたい
- 信用リスク計測のモデルとしては，１ファクター・ガウシアンコピュラモデル（1 factor Gaussian copula model，以下 1FGCM）が業界標準であり，リスク管理やプライシングに用いられている
- 1FGCM による実際のデフォルトデータの実証分析を行い，その結果を踏まえて 1FGCM の改良を検討することで，今後の本邦金融機関の信用リスク管理の高度化に役立つ情報を提供することを目指す

1FGCM を以降口頭では 1 ファクターモデルと呼ぶ．

1FGCM によるデフォルトデータの実証分析

- Gordy and Heitfield (2002)
  - 1FGCM，時系列デフォルト件数データ（S&P 社，Moody's 社）
  - （筆者が知る限り）はじめて最尤法によりモデルパラメータを推定
- 北野 (2007)
  - 2 ファクターモデル，データ：資本金区分別デフォルトデータ
  - 最尤法でモデルパラメータを推定
  - 2 ファクター化により AIC（赤池情報量規準）が低下
- 橋本 (2008)
  - モデル：1FGCM，データ：帝国データバンクのデフォルトデータ
  - グループ毎 (業種・信用度・企業規模・地域) にパラメータを推定・比較
- 吉規・中川 (2010)
  - モデル：t 分布 2 ファクターモデル，データ：CLO 裏付け資産のデフォルトデータ
  - t 分布 2 ファクターモデルの有用性を示唆
- 本研究
  - モデルパラメータの推定に加えて観測分布との比較，モデルの改良を検討

モデルとデータ

1FGCM

時刻を $t \geq 0$ とし，現在を $t = 0$ とする．現時点で n 個の資産があり，資産 j $(j = 1, \ldots, n)$ のデフォルト時刻 $\tau_j > 0$ が，

$$\tau_j = F_j^{-1}(\Phi(X_j)) \tag{1}$$

$$X_j = \rho_j V + \sqrt{1 - \rho_j^2}\epsilon_j \tag{2}$$

で与えられるモデルを 1FGCM と呼ぶ．

- V，$\epsilon_j, j = 1, \ldots, n$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う互いに独立な確率変数 (V は共通要因（共変量），ϵ_j は固有要因)
- X_j も標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数
- $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ の分布関数
- $F_j(\cdot)$ は τ_j の分布関数 ((累積) デフォルト確率)，$F_j^{-1}(\cdot)$ はその逆関数
- $\rho_j \in [-1, 1]$ は X_j の V への依存度 (ファクター・ローディング)

1FGCM による条件付きデフォルト確率

共変量 $V = v$ が与えられたとき，資産 j が時刻 t までにデフォルトする確率，

すなわち条件付きデフォルト確率 $p_j(t, v)$ は，以下のとおり．

$$
\begin{aligned}
p_j(t, v) &= P\left\{\tau_j \le t \middle| V = v\right\} \\
&= P\left\{\epsilon_j \le \frac{\Phi^{-1}(F_j(t)) - \rho_j v}{\sqrt{1-\rho_j^2}}\right\} \\
&= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(F_j(t)) - \rho_j v}{\sqrt{1-\rho_j^2}}\right) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

$F_j(t)$ は無条件デフォルト確率

ϵ_j は互いに独立なので，デフォルトは確率 $p_j(t, v)$ で独立に発生する（条件付き独立）

分析に使用する記号と仮定

- 分析に使用する記号
  - 資産数
    時刻 $s, s = 1, \ldots, S$ での格付け $k, k = 1, \ldots, K$ の資産数を $n_{k,s}$ 件（$k = 1, \ldots, K, s = 1, \ldots, S$）として，$\boldsymbol{n}_s = (n_{1,s}, \ldots, n_{k,s})^\top, \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{n}_1^\top, \ldots, \boldsymbol{n}_S^\top)^\top$ で表現
  - デフォルト件数
    区間 $(s, s+1]$ の 1 期間に発生したデフォルト件数を $d_{k,s}$ 件（$k = 1, \ldots, K, s = 1, \ldots, S$）として，$\boldsymbol{d}_s = (d_{1,s}, \ldots, d_{k,s})^\top, \boldsymbol{d} = (\boldsymbol{d}_1^\top, \ldots, \boldsymbol{d}_S^\top)^\top$ で表現
- 仮定
  1. ファクター・ローディング，無条件デフォルト確率は格付け毎に与えられるとする（同じ格付けに属する資産で共通）
  2. 時系列データ $\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_S$ は独立

格付け毎のデフォルト件数の分布

仮定 1 より共変量 $V = v$ が与えられたとき，時刻 s で格付け k の資産が $n_{k,s}$ 件中 $d_{k,s}$ 件デフォルトする確率は，個々の資産のデフォルト発生確率を $p_k(t, v)$ とする二項分布に従うので以下の通り．

- 格付け k で資産 $n_{k,s}$ 件のうち $d_{k,s}$ 件がデフォルトする条件付き確率

$$p(d_{k,s}; n_{k,s}, v) = \binom{n_{k,s}}{d_{k,s}} p_k(t, v)^{d_{k,s}} (1 - p_k(t, v))^{n_{k,s} - d_{k,s}} \qquad d_{k,s} = 0, 1, \ldots, n_{k,s} \tag{4}$$

- 格付け k で資産 $n_{k,s}$ 件のうち $d_{k,s}$ 件がデフォルトする無条件確率

$$p(d_{k,s}; n_{k,s}) = \mathbb{E}\left[p(d_{k,s}; n_{k,s}, V)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} p(d_{k,s}; n_{k,s}, v)\phi(v)\mathrm{d}v \tag{5}$$

ただし，$\phi(v)$ は $N(0, 1)$ の密度関数

複数格付けのデフォルト件数の同時分布

複数格付け $k, k = 1, \ldots, K$ でそれぞれ資産 $n_{k,s}$ 件中 $d_{k,s}$ 件デフォルトする条件付き同時確率と無条件同時確率は以下の通り．

- 格付け k でそれぞれ $n_{k,s}$ 件中 $d_{k,s}$ 件デフォルトする条件付き同時確率

$$p(\boldsymbol{d}_s; \boldsymbol{n}_s, v) = \prod_{k=1}^{K} p(d_{k,s}; n_{k,s}, v) \tag{6}$$

- 格付け k でそれぞれ $n_{k,s}$ 件中 $d_{k,s}$ 件デフォルトする無条件同時確率

$$p(\boldsymbol{d}_s; \boldsymbol{n}_s) = \mathbb{E}\left[p(\boldsymbol{d}_s; \boldsymbol{n}_s, V)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} p(\boldsymbol{d}_s; \boldsymbol{n}_s, v)\phi(v)\mathrm{d}v \tag{7}$$

最尤法に用いる尤度関数

- 時系列データ $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{d}$ が実現する無条件同時確率

$$p(\boldsymbol{d}; \boldsymbol{n}) = \prod_{s=1}^{S} p(\boldsymbol{d}_s; \boldsymbol{n}_s) \tag{8}$$

- 実証分析では，$t = 1$ とし，式 (3) のファクター・ローディングと無条件デフォルト確率 $(\rho_j, F_j(1))$ を $\theta_k = (\rho_k, F_{k,1})^\top$ として次の尤度関数で推定する
- 時系列データ $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{d}$ が与えられたときの尤度関数

$$L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{n}, \boldsymbol{d}) = p(\boldsymbol{d}; \boldsymbol{n}) = \prod_{s=1}^{S} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{K} \binom{n_{k,s}}{d_{k,s}} p_k(1, v)^{d_{k,s}} (1 - p_k(1, v))^{n_{k,s} - d_{k,s}} \phi(v) \mathrm{d}v \right] \tag{9}$$

ただし，$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1^\top, \ldots, \theta_k^\top)^\top$

$$p_k(1, v) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(F_{k,1}) - \rho_k v}{\sqrt{1 - {\rho_k}^2}} \right) \tag{10}$$

データ

Moody's (2025) より 1990 年〜2024 年の 1 年間のデフォルト件数をもとに下表のような格付け別デフォルトデータを準備．

時刻 s	格付け区分											
	Aa		A		Baa		Ba		B		Caa-C	
	$n_{1,s}$	$d_{1,s}$	$n_{2,s}$	$d_{2,s}$	$n_{3,s}$	$d_{3,s}$	$n_{4,s}$	$d_{4,s}$	$n_{5,s}$	$d_{5,s}$	$n_{6,s}$	$d_{6,s}$
1990	xxx	xx	xxx	xx	xxx	xx	xxx	xx	xxx	xx	xxx	xx
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2024	xxx	xx	xxx	xx	xxx	xx	xxx	xx	xxx	xx	xxx	xx

分析 (1)：格付け別のデフォルト件数の分布

時系列データに基づくモデルパラメータの推定

- 分析 (1) では，$K = 1$ として，格付け別に式 (9) を最大にするモデルパラメータ ρ_k と $F_{k,1}$ を推定する
- 分析 (2) では，全格付けで，式 (9) を最大にするモデルパラメータ $\rho_k, k = 1, \ldots, K$ と $F_{k,1}, k = 1, \ldots, K$ を同時推定する

分析 (1)：モデルパラメータの推定結果（格付け別）

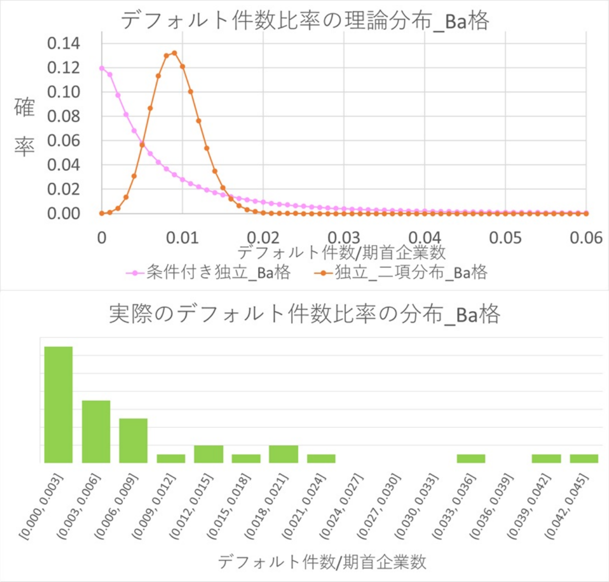
格付け k	$\hat{\rho}_k$	$\hat{F}_{k,1}$	$\hat{\rho}_k$ の標準誤差 $\sigma_{\hat{\rho}_k}$	$\hat{F}_{k,1}$ の標準誤差 $\sigma_{\hat{F}_{k,1}}$	$\frac{\hat{\rho}_k}{\sigma_{\hat{\rho}_k}}$	$\frac{\hat{F}_{k,1}}{\sigma_{\hat{F}_{k,1}}}$	1 年間のデフォルト率 (平均値)
Aa	0.732	0.001	0.208	0.001	3.513	0.651	0.0003
A	0.531	0.001	0.132	0.000	4.040	1.587	0.0006
Baa	0.423	0.002	0.075	0.001	5.665	3.020	0.0021
Ba	0.408	0.009	0.059	0.002	6.965	4.145	0.0090
B	0.407	0.033	0.044	0.006	9.333	5.630	0.0336
Caa-C	0.345	0.119	0.040	0.013	8.696	9.396	0.1235

「推定値/標準誤差」の絶対値が 2.33 以上であれば統計的に有意とみなし推定値を赤字で表現 (以下同様)

分析 (1)：推定結果の評価

- ファクター・ローディング $\hat{\rho}_k$
  - すべての格付けで有意
  - 高格付けほど高く，低格付けほど低い
- 無条件デフォルト確率 $\hat{F}_{k,1}$
  - 高格付けでは有意でないが，Baa 格以下では有意
  - 低い格付けほど高い傾向
  - Moody's (2025) の 1990 年〜2024 年のデフォルトデータに基づく実績年間デフォルト率の平均値と整合的

分析 (1)：格付け毎のデフォルト件数の分布 (理論分布と観測分布)



- 推定結果に基づく 1FGCM による理論分布と観測分布を比較した (左図は Ba 格の例)
- 理論分布はデフォルトが独立に生じるとする二項分布よりもテイルが厚い
- 観測分布のほうがテイルはさらに厚い

分析 (2)：複数格付けのデフォルト件数の同時分布

分析 (2)：全格付け同時推定の結果

表 1: 全格付け同時推定の結果

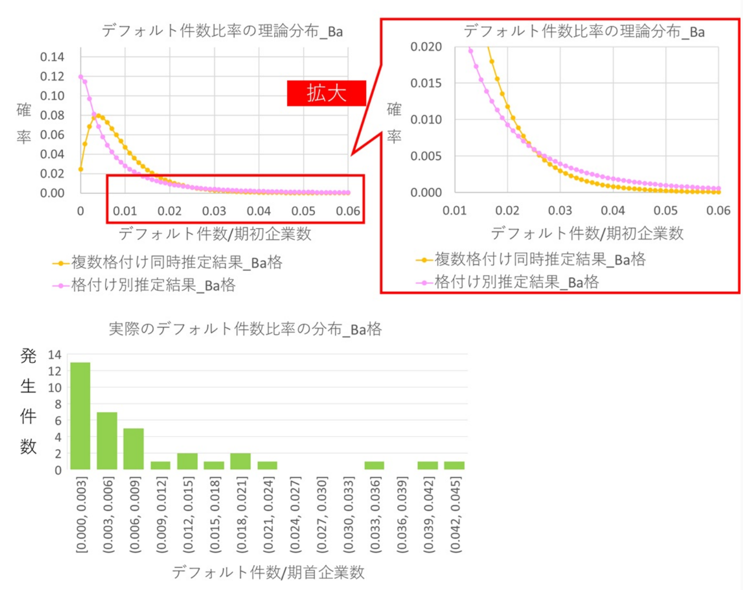
対数尤度：−663.346，AIC：1350.692

	ρ			F			
格付け k	推定値	標準誤差	推定値 /標準誤差	推定値	標準誤差	推定値 /標準誤差	1 年間の デフォルト率 (平均値)
Aa	−0.015	0.114	−0.135	0.0003	0.000	2.617	0.0003
A	0.141	0.060	2.358	0.001	0.000	4.550	0.0006
Baa	0.214	0.042	5.137	0.003	0.000	6.184	0.0021
Ba	0.262	0.040	6.540	0.009	0.001	6.654	0.0090
B	0.361	0.042	8.617	0.032	0.005	6.399	0.0336
Caa-C	0.355	0.041	8.578	0.122	0.013	9.277	0.1235

分析 (2)：推定結果の評価

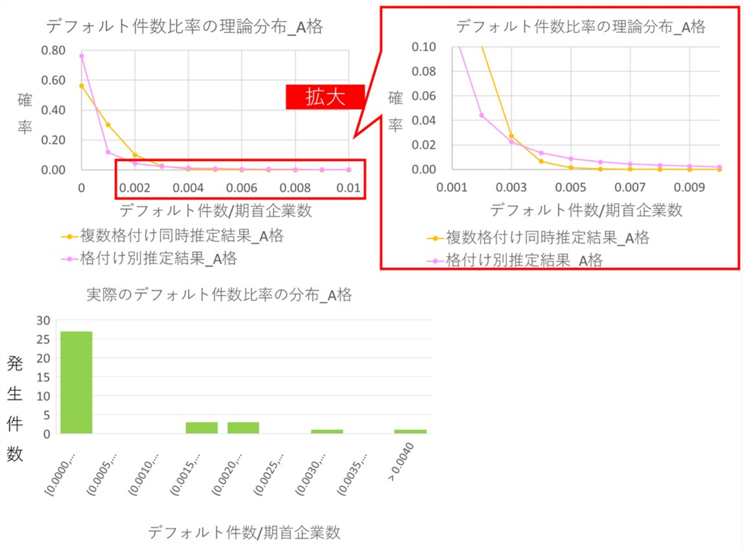
- ファクター・ローディング $\hat{\rho}$
  - 分析 (1) とは大きく異なる結果 (Ba 格以上は分析 (1) の推定値との差が標準誤差よりも大きい)
  - 分析 (1) と比較して全体的に小さい値となっている
  - Aa 格以外は有意
  - 低格付けほど高くなる傾向
  - 高格付け企業ほど経済状況の変動の影響は受けにくいことを示唆
- 無条件デフォルト確率 $\hat{F}$
  - 分析 (1) と同様の結果
  - すべての格付けで有意であり，有意性は低格付けほど高い傾向
  - 低い格付けほど高い傾向

分析 (2)：デフォルト件数の分布



- 格付け別の推定結果と複数格付け同時分布の推定結果を比較 (左図は Ba 格の例)
- 周辺分布の形状 (特にテイル部分) は格付け別の推定結果のほうがより良く表現
- デフォルトの同時性表現と周辺分布の形状捕捉の両立という課題が浮彫りに

分析 (2)：デフォルト件数の分布



分析 (3)：複数格付けのデフォルト件数の同時分布:2 フェーズモデルによる推定

分析 (3)：2 フェーズモデルの提案 (フェーズ A とフェーズ B)

- 分析 (2) までで，$V = v$ という条件下において，デフォルト事象の同時性と周辺分布の表現を両立することに課題が識別された
- 改善策として，信用リスクの状態をフェーズと表現しパラメータが異なる 2 つのフェーズ (A と B) を考える
- デフォルト件数の分布を 2 つのフェーズを発生確率の比で混合して表現することを考え，
  (a) 主に平常状態を表現するフェーズ A
  (b) 主に信用リスクが高まった状態を表現するフェーズ B

  といった形で表現できないか検討する

分析 (3)：2 フェーズモデルの提案 (フェーズ A とフェーズ B)

- 2 フェーズモデルにおける条件付きデフォルト確率

$$p_k(1, v) = (1-\alpha)\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(F^{\mathrm{A}}_{k,1}) - \rho^{\mathrm{A}}_k v}{\sqrt{1-(\rho^{\mathrm{A}}_k)^2}}\right) + \alpha\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(F^{\mathrm{B}}_{k,1}) - \rho^{\mathrm{B}}_k v}{\sqrt{1-(\rho^{\mathrm{B}}_k)^2}}\right) \tag{11}$$

- 格付け k で $n_{k,s}$ 件のうち $d_{k,s}$ 件デフォルトが発生する条件付き確率

$$(1-\alpha)p^{\mathrm{A}}(d_{k,s}; n_{k,s}, v) + \alpha p^{\mathrm{B}}(d_{k,s}; n_{k,s}, v) \tag{12}$$

- 尤度関数

$$\begin{aligned} &L(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{A}}, \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{B}}, \alpha; \boldsymbol{n}, \boldsymbol{d}) \\ &= \prod_{s=1}^{S}\left[(1-\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{k=1}^{K} p^{\mathrm{A}}(d_{k,s}; n_{k,s}, v)\phi(v)\mathrm{d}v + \alpha\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{k=1}^{K} p^{\mathrm{B}}(d_{k,s}; n_{k,s}, v)\phi(v)\mathrm{d}v\right] \end{aligned} \tag{13}$$

ただし，$1-\alpha : \alpha, 0 < \alpha < 1$ はフェーズ A とフェーズ B の混合比率

分析 (3)：2 フェーズモデルのパラメータの推定結果

表 2: 2 フェーズモデルに基づく全格付け同時推定の結果

対数尤度：−508.926,　AIC：1067.852

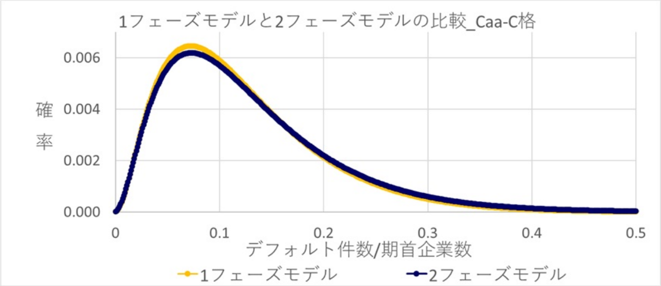
混合率 α：0.114, α **の標準誤差** 0.054, α **の推定値/標準誤差**：2.12

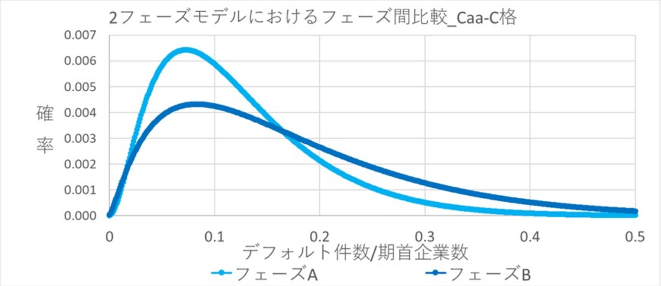
格付け k	フェーズ A($\boldsymbol{M}_{\mathrm{A}}$)						フェーズ B($\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}$)						1 フェーズモデルの $\hat{\boldsymbol{F}}$
	$\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{A}}$			$\boldsymbol{F}^{\mathrm{A}}$			$\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{B}}$			$\boldsymbol{F}^{\mathrm{B}}$			
	推定値	標準誤差	推定値/標準誤差	推定値	標準誤差	推定値/標準誤差	推定値	標準誤差	推定値/標準誤差	推定値	標準誤差	推定値/標準誤差	
Aa	−0.509	0.302	−1.684	0.000	0.000	0.682	−0.250	0.173	−1.439	0.002	0.002	1.576	0.000
A	−0.040	0.099	−0.401	0.000	0.000	3.390	0.117	0.108	1.083	0.002	0.001	3.038	0.001
Baa	0.150	0.054	2.760	0.001	0.000	5.248	−0.005	0.048	−0.095	0.009	0.001	7.270	0.003
Ba	0.328	0.051	6.397	0.007	0.002	4.627	−0.152	0.072	−2.126	0.026	0.006	4.652	0.009
B	0.403	0.050	8.030	0.031	0.006	5.148	0.030	0.037	0.813	0.052	0.004	12.988	0.032
Caa-C	0.356	0.047	7.565	0.122	0.014	8.634	0.433	0.127	3.421	0.168	0.057	2.956	0.122

分析 (3)：推定結果の評価

- 分析 (2) と比較して，AIC(赤池情報量規準) は低下
- 無条件デフォルト確率
  - $\hat{F}^{\mathrm{A}}_{k,1}$ も $\hat{F}^{\mathrm{B}}_{k,1}$ も Aa 格以外有意
  - 分析 (2）の 1 フェーズモデルによる推定値を $\hat{F}^{s}_{k,1}$ で示すと，Caa-C 格以外で $\hat{F}^{\mathrm{A}}_{k,1} < \hat{F}^{\mathrm{s}}_{k,1} < \hat{F}^{\mathrm{B}}_{k,1}$ が成り立ち，Caa-C 格も $F^{A}_{k,1} < F^{B}_{k,1}$
  - フェーズ A はどの格付けでも無条件デフォルト確率がやや低い状態，フェーズ B はどの格付けでも無条件デフォルト確率がやや高い状態，という特性を持つことが示唆される
- ファクター・ローディング
  - フェーズ A
    - $\hat{\rho}^{\mathrm{A}}_{k}$ は，Aa 格及び A 格以外は有意
    - Aa 格及び A 格は有意ではないが負値
  - フェーズ B
    - $\hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{k}$ は Caa-C 格だけ有意

分析 (3)：1 フェーズモデルと 2 フェーズモデル





- すべてのパラメータが有意である Caa-C 格を示す
- フェーズ A では $\hat{F}^{\mathrm{A}}_{k,1}$ も $\hat{\rho}^{\mathrm{A}}_{k}$ も低め
- フェーズ B では $\hat{F}^{\mathrm{B}}_{k,1}$ も $\hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{k}$ も高め
- フェーズ B はリスクがより高いテイル事象が生じるような経済状況の可能性

おわりに

おわりに

1. 格付け別にデフォルト件数の分布のモデルパラメータを推定
   - 理論分布よりも観測分布のほうがテイルが厚い結果に
2. 複数格付けのデフォルト件数の同時分布のモデルパラメータを推定
   - 格付け別推定結果に比べてテイルの厚さが失われた
   - デフォルトの同時性の表現と周辺分布の形状捕捉の両立に課題が示唆された
3. 課題解決策として 2 フェーズモデルを導入
   - フェーズ B は無条件デフォルト確率，ファクター・ローディングがやや高い
   - フェーズ B は信用リスク評価上，Var や ES 等のテイルリスクを評価するうえで重要と考えられる
   - フェーズ B は信用リスク計測上のストレスシナリオとして利用することも考えられる
4. 今後の課題
   - 経済状況の変動がデフォルト件数に与える影響を踏まえた将来の損失額分布の分析

参考文献

Gordy, M. and Heitfield, E. (2002) "Estimating Default Correlations from Short Panels of Credit Rating Performance Data," https://eml.berkeley.edu/~mcfadden/e242_f03/heitfield.pdf, アクセス日：2026 年 1 月 10 日.

Moody's (2025) "Annual default study Corporate default rate to fall below its long term average in 2025," Annual default study https://www.moodys.com/research/Annual-default-study-Corporate-default-rate-to-fall-below-its-long-term-Default-Report--PBC_1436615, アクセス日：2025 年 12 月 31 日.

北野利幸 (2007) 「デフォルト実績データによるデフォルト依存関係の推定– 2 ファクターモデルによるアセット相関の最尤推定」,『日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌』 **50**，42–67.

橋本崇 (2008) 「与信ポートフォリオの信用リスク計量における資産相関について —本邦のデフォルト実績データを用いた実証分析—」, 日本銀行ワーキングペーパーシリーズ 08-J-10，日本銀行.

吉規寿郎・中川秀敏 (2010) 「t 分布 2 ファクターモデルを用いた中小企業 CLO のデフォルト依存関係の分析」,『ジャフィージャーナル：金融工学と市場計量分析「定量的信用リスク評価とその応用」』，117–165.

補論

分析 (1) 実証分析の流れ

前提：
共変量$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}$という条件下で,
①個々の資産のデフォルトは独立
②分析対象の債権ポートフォリオは, 格付けkに属する個々の資産の条件付きデフォルト確率がp_kで等しい
③デフォルトデータは期間に重複がなく, 時系列的に独立
※ ①②により, 格付けkのデフォルト件数はp_kを発生確率とする二項分布に従う

- 条件付きデフォルト確率p_kをファクターローディングρ_kと無条件デフォルト確率$F_{k,1}$で表現
- 格付け毎に「資産n_k件中d_k件がデフォルトする条件付き確率」をp_kで表現
- 格付け毎に「資産n_k件中d_k件がデフォルトする無条件確率」を共変量Vについての期待値で表現

- 時系列データが与えられたときの尤度関数を表現

- 最尤法によりモデルパラメータのファクターローディングρ_kと無条件デフォルト確率$F_{k,1}$を推定
- 標準誤差により推定結果を評価

分析 (2) 実証分析の流れ

前提：
共変量$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}$という条件下で，
①個々の資産のデフォルトは独立
②分析対象の債権ポートフォリオは，格付けkに属する個々の資産の条件付きデフォルト確率がp_kで等しい
③デフォルトデータは期間に重複がなく，時系列的に独立
※ ①②により，格付けkのデフォルト件数はp_kを発生確率とする二項分布に従う

- 条件付きデフォルト確率p_kをファクターローディングρ_kと無条件デフォルト確率$F_{k,1}$で表現
- 複数格付けの「資産n_k件中d_k件がデフォルトする条件付き同時確率」をp_kで表現
- 複数格付けの「資産n_k件中d_k件がデフォルトする無条件同時確率」を共変量Vについての期待値で表現

- 時系列データが与えられたときの尤度関数を表現

- 最尤法によりモデルパラメータのファクターローディングρ_kと無条件デフォルト確率$F_{k,1}$を推定
- 標準誤差とAIC(赤池情報量規準)により推定結果を評価

2 フェーズモデルの導出 (1)

経済環境をフェーズと表現し，モデルパラメータが異なる 2 つのフェーズを考え，2 つのフェーズが定確率で発現するモデルを構築する．

- 2 つのフェーズをそれぞれフェーズ A とフェーズ B とする
- フェーズ A
格付け k のモデルパラメータを $(\rho_k^{\mathrm{A}}, F_{k,1}^{\mathrm{A}})$ とし，$\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{A}} = (\rho_1^{\mathrm{A}}, F_{1,1}^{\mathrm{A}}, \ldots, \rho_K^{\mathrm{A}}, F_{K,1}^{\mathrm{A}})^\top$ をモデルパラメータとする
- フェーズ B
格付け k のモデルパラメータを $(\rho_k^{\mathrm{B}}, F_{k,1}^{\mathrm{B}})$ とし，$\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{B}} = (\rho_1^{\mathrm{B}}, F_{1,1}^{\mathrm{B}}, \ldots, \rho_K^{\mathrm{B}}, F_{K,1}^{\mathrm{B}})^\top$ をモデルパラメータとする．
- 式 (3) のファクター・ローディング ρ_k を格付け k 毎に ρ_k^{A} か ρ_k^{B} のいずれかの値をとる確率変数 $\tilde{\rho}_k$，無条件デフォルト確率 $F_{k,1}$ を格付 k 毎に $F_{k,1}^{\mathrm{A}}$ か $F_{k,1}^{\mathrm{B}}$ のいずれかの値をとる確率変数 $\tilde{F}_k$ とする

2 フェーズモデルの導出 (2)

B を確率 α で 1，確率 $(1-\alpha)$ で 0 となるベルヌーイ変数とすると，

$$\tilde{\rho}_k = (1-B)\rho_k^{\mathrm{A}} + B\rho_k^{\mathrm{B}}, \qquad k = 1, \ldots, K$$

$$\tilde{F}_k = (1-B)F_k^{\mathrm{A}} + BF_k^{\mathrm{B}}, \qquad k = 1, \ldots, K$$

となり，式 (2) は，

$$X_k = \left\{(1-B)\rho_k^{\mathrm{A}} + B\rho_k^{\mathrm{B}}\right\} V + \sqrt{1 - \left\{(1-B)\rho_k^{\mathrm{A}} + B\rho_k^{\mathrm{B}}\right\}^2}\epsilon_k$$

と表現されるので，

- $B = 0$(確率 $(1-\alpha)$) のとき，$X_k = \rho_k^{\mathrm{A}} V + \sqrt{1 - (\rho_k^{\mathrm{A}})^2}\epsilon_k$
- $B = 1$(確率 α) のとき，　$X_k = \rho_k^{\mathrm{B}} V + \sqrt{1 - (\rho_k^{\mathrm{B}})^2}\epsilon_k$

2 フェーズモデルの導出 (3)

- $V = v$ が与えられたときの格付け k に属する資産の条件付デフォルト確率

$$p_k(1, v) = (1-\alpha)\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(F^{\mathrm{A}}_{k,1}) - \rho^{\mathrm{A}}_k v}{\sqrt{1-(\rho^{\mathrm{A}}_k)^2}}\right) + \alpha\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(F^{\mathrm{B}}_{k,1}) - \rho^{\mathrm{B}}_k v}{\sqrt{1-(\rho^{\mathrm{B}}_k)^2}}\right)$$

ここで，フェーズ A とフェーズ B の混合比率が $1-\alpha : \alpha, 0 < \alpha < 1$

- $V = v$ が与えられたときのフェーズ毎の条件付きデフォルト確率

$$p^{\mathrm{A}}_k(1, v) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(F^{\mathrm{A}}_{k,1}) - \rho^{\mathrm{A}}_k v}{\sqrt{1-(\rho^{\mathrm{A}}_k)^2}}\right) \tag{14}$$

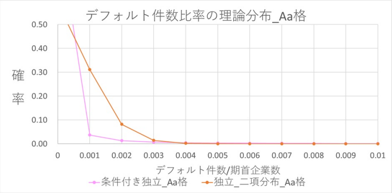
$$p^{\mathrm{B}}_k(1, v) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(F^{\mathrm{B}}_{k,1}) - \rho^{\mathrm{B}}_k v}{\sqrt{1-(\rho^{\mathrm{B}}_k)^2}}\right) \tag{15}$$

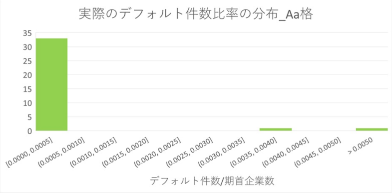
2 フェーズモデルの導出 (4)

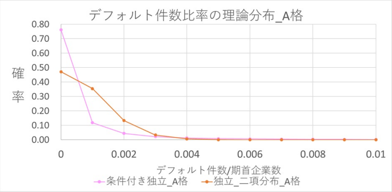
2 フェーズモデルにおけるデフォルト発生件数の条件付き分布は，フェーズ A は条件付きデフォルト確率が式 (14) の二項分布に従い，フェーズ B は条件付きデフォルト確率が式 (15) の二項分布に従うので，時刻 s で格付け k の資産 $n_{k,s}$ 件のうち $d_{k,s}$ 件がデフォルトする条件付き確率は，

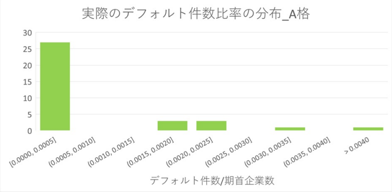
$$
\begin{aligned}
&(1-\alpha)\binom{n_{k,s}}{d_{k,s}}(p_k^{\mathrm{A}}(1,v))^{d_{k,s}}(1-p_k^{\mathrm{A}}(1,v))^{n_{k,s}-d_{k,s}} \\
&\qquad + \alpha\binom{n_{k,s}}{d_{k,s}}(p_k^{\mathrm{B}}(1,v))^{d_{k,s}}(1-p_k^{\mathrm{B}}(1,v))^{n_{k,s}-d_{k,s}} \\
&= (1-\alpha)p^{\mathrm{A}}(d_{k,s};n_{k,s},v) + \alpha p^{\mathrm{B}}(d_{k,s};n_{k,s},v)
\end{aligned}
$$

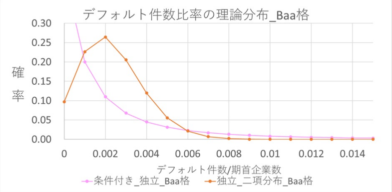
格付け別推定結果に基づく理論分布と観測分布 (1)

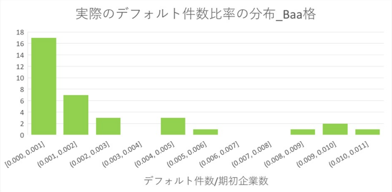




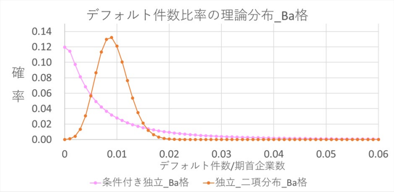


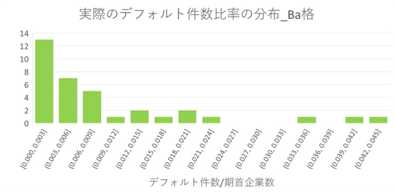


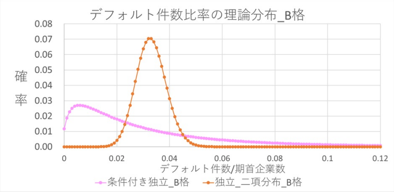


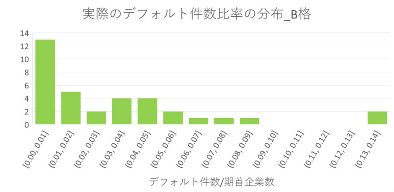


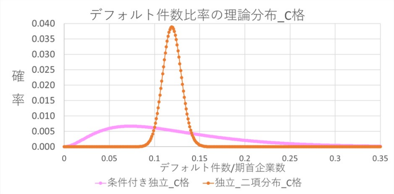
格付け別推定結果に基づく理論分布と観測分布 (2)

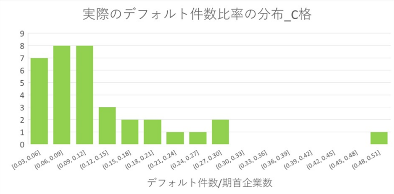




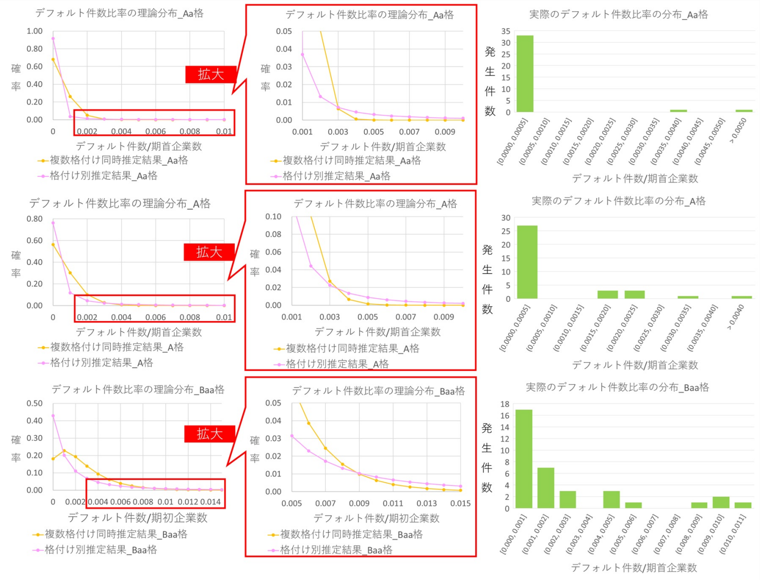




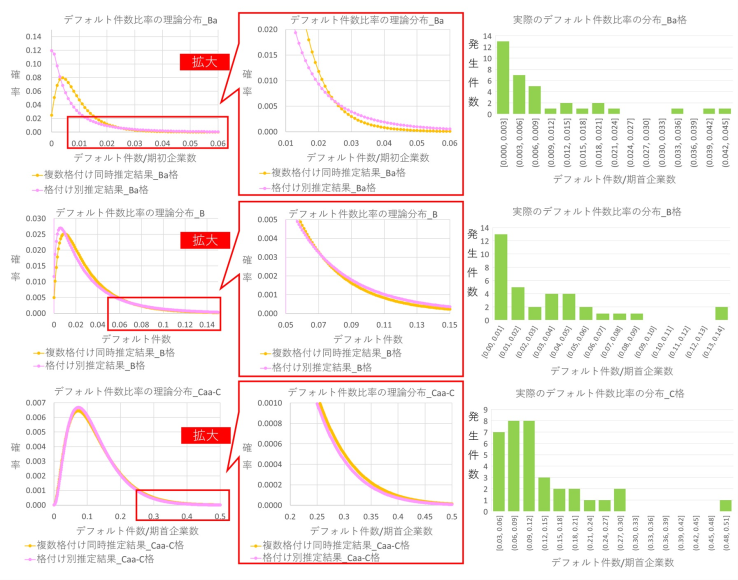




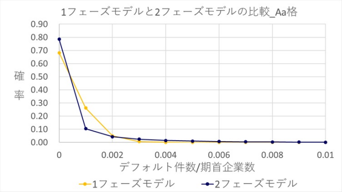
複数格付け同時推定結果に基づく理論分布と観測分布 (1)

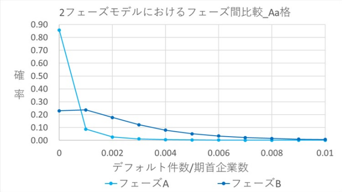


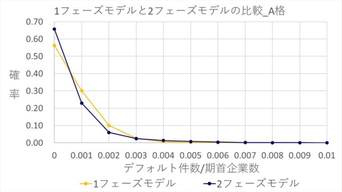
複数格付け同時推定結果に基づく理論分布と観測分布 (2)

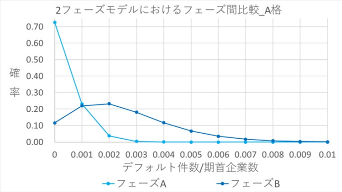


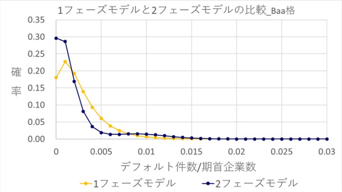
1 フェーズモデルと 2 フェーズモデルの比較 (1)

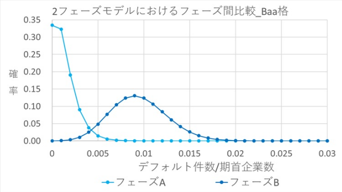












1 フェーズモデルと 2 フェーズモデルの比較 (2)