動的通貨ファクターを考慮した最適為替ヘッジ：強化学習による連続時間 HJB 方程式の数値解法

三上 俊太

2026 年 3 月 7 日 (土)

東京都立大学 大学院経営学研究科
ファイナンスプログラム

背景

- 為替リスク管理に関して，通貨の期待リターンは共通ファクターに対する感応度の違いによって通貨ごとに異なり，かつそのリスクプレミアムは時変的であることが標準的な見解
- また，動的ポートフォリオ選択理論によれば，長期投資家の最適為替ヘッジは短期投資家とは本質的に異なる

$\rightarrow$本研究では，長動的な通貨ファクターと長期的な投資ホライゾンを同時に考慮し，最適為替ヘッジ戦略の特徴を解明する

動的通貨ファクター

- 各時点における通貨超過リターンはドルファクターとキャリーファクターという，通貨に共通の 2 ファクターモデルで表すことが標準的（Lustig, Roussanov and Verdelhan (2011)）．Opie and Riddiough (2020) は，通貨ファクターと各通貨のファクター感応度から通貨期待リターンを推定し，最適ヘッジ比率を推定する手法を提案
- 一方で，この手法は静的な一期間最適化の反復であり，長期投資において最適とはいえない
- 長期投資を考えるためには HJB 方程式を用いて最適ヘッジを定式化する必要があるが，求解には多次元の動的な状態変数を伴う数値計算が必要．本研究では，強化学習のアルゴリズムを用いて最適化計算を行う

データ

- 四半期データを使用．対象国は G10 通貨国（オーストラリア，カナダ，EU（1999 年以前はドイツ），日本，ニュージーランド，ノルウェー，スウェーデン，スイス，英国，米国）
- 株式には MSCI のカントリーインデックスのトータルリターン，米ドル建てスポットレートならびにフォワードレートは WM/Reuters ならびに Barclays Bank International (BBI)，米ドルのリスクフリーレートは French Data Library の公開データを使用．通貨ファクターの予測変数のうち TED スプレッドならびにコモディティインデックス (CRB 指数) については，DataStream から該当するデータを取得．
- サンプル期間は全データが取得可能な 1988 年 3 月から 2024 年 6 月

モデル: 株式

n 個の株式とこれに対応する n 個の通貨，さらに k 個の通貨の予測変数があるものとし，$d = 2n + k$ とおく．また，無リスク資産も存在するものとし，ドルのリスクフリーレート（定数）を r_f とおく．

株式の価格について，資産 i のドル建て価格 P_{it} は以下に従う．

$$\frac{dP_{it}}{P_{it}} = (\mu_i + r_f)\, dt + \boldsymbol{\sigma}_i^p\, d\boldsymbol{Z}_t, \qquad i = 1, \ldots, n$$

ここで，$\boldsymbol{Z}_t \in \mathbb{R}^d$ は互いに直交する d 次元の標準ブラウン運動，$\boldsymbol{\sigma}_i^p \in \mathbb{R}^{1\times d}$ は行ベクトルのボラティティリティ，μ_i はリスクプレミアム．$\boldsymbol{\sigma}_i^p$ と μ_i は定数を仮定．

μ_m は市場ポートフォリオのリスクプレミアム，β_i^m は市場ベータ（ともに定数）として，1 ファクターモデル（CAPM，米ドル建て）を仮定すると

$$\frac{dP_{it}}{P_{it}} = (\beta_i^m \mu_m + r_f)\, dt + \boldsymbol{\sigma}_i^p\, d\boldsymbol{Z}_t$$

モデル: 通貨 1

資産 i に関連する通貨フォワード S_{it} は以下に従う．

$$\frac{dS_{it}}{S_{it}} = \lambda_{it}\,dt + \boldsymbol{\sigma}_i^s\,d\boldsymbol{Z}_t, \qquad i = 1, \ldots, n$$

S_{it} は外国通貨 1 単位あたりのドル建て価値．$\boldsymbol{\sigma}_i^s \in \mathbb{R}^{1\times d}$ は行ベクトルのボラティィリティィであり，定数を仮定

通貨のリスクプレミアム λ_{it} は 2 ファクターモデル（米ドル建て）を仮定．

$$\lambda_{it} = \beta_i^d \lambda_t^d + \beta_i^c \lambda_t^c$$

λ_t^d と λ_t^c は，それぞれドルファクターとキャリーファクターのプレミアムで，各通貨に共通．ドルファクターは米ドルに対する各通貨の超過リターンの等ウェイトによる平均，キャリーファクターは高金利通貨をロング，低金利通貨をショートするゼロコスト・ポートフォリオのリターン．β_i^d と β_i^c は各ファクターに対するベータ（ともにヒストリカルデータから推定し，定数を仮定）で，各通貨のリスクプレミアムの違いは β_i^d と β_i^c からもたらされる．

モデル: 通貨 2

2 ファクターのプレミアムは k 個の通貨ファクターの予測変数のベクトル $\boldsymbol{X}_t \in \mathbb{R}^k$ により定まるものとし，以下のアフィン形を仮定．

$$\lambda_t^d = a_d + \boldsymbol{b}_d^\top \boldsymbol{X}_t, \qquad \lambda_t^c = a_c + \boldsymbol{b}_c^\top \boldsymbol{X}_t$$

$a_d, \boldsymbol{b}_d, a_c, \boldsymbol{b}_c$ は定数パラメータで，$\boldsymbol{X}_t$ は以下の多変量 OU 過程に従うものとする．

$$d\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{X}_t \, dt + \boldsymbol{\sigma}^x \, d\boldsymbol{Z}_t$$

$\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{k \times k}$，$\boldsymbol{\sigma}^x \in \mathbb{R}^{k \times d}$ である．β_i^d および β_i^c は，各通貨の対数リターンを 2 つの通貨ファクターの対数リターンに時系列回帰して推定値を得る．$a_d, \boldsymbol{b}_d, a_c, \boldsymbol{b}_c$ は，2 つの通貨ファクターの対数リターンをそれぞれ予測変数 $\boldsymbol{X}_t$ に時系列回帰して推定値を得る．

モデル: 通貨ファクターの予測変数 1

Opie and Riddiough (2020) と同様，全通貨に共通の通貨ファクターの予測変数は以下の四つ（いずれも平均控除後）.

- 平均フォワードディスカウント．対数スポットレートと対数フォワードレートの差の全通貨のクロスセクション平均 $\overline{fd}_t$.
- 通貨ボラティィリティ．各通貨リターンの月中の日次リターンの二乗を全通貨でクロスセクション平均して算出した σ_t^{FX} の 3 ヶ月間の平均対数成長率 $\Delta\sigma_t^{FX} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{\sigma_t^{FX}}{\sigma_{t-3}^{FX}}\right)$.
- TED スプレッド．米ドルの 3M LIBOR と 3M T-Bill レートの差の 3 ヶ月間の平均対数成長率 $\Delta TED_t = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{TED_t}{TED_{t-3}}\right)$.
- コモディティティリターン．CRB インデックスの 3 ヶ月対数リターン $\Delta \mathit{CRB}_t = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{CRB_t}{CRB_{t-3}}\right)$.

モデル: 通貨ファクターの予測変数 2

通貨ファクターの予測変数ベクトル $\boldsymbol{X}_t$ が従う多変量 OU 過程に対応する離散時間の VAR(1) モデルは以下．

$$\boldsymbol{X}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{X}_t + \zeta\boldsymbol{\eta}_{t+\Delta t}$$

$\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ と $\zeta \in \mathbb{R}^{k\times d}$ は行列．パラメータ $\boldsymbol{\Psi}$ は通常の時系列重回帰によって推定．最適化モデルは連続時間で定式化されているため，離散時間の VAR(1) モデルで推定した $\boldsymbol{\Psi}$，ζ に合うように，連続時間 OU 過程の Φ，$\boldsymbol{\sigma}^x$ を求める (変換方法は Appendix 参照)．なお，$\boldsymbol{\sigma}^s$，$\boldsymbol{\sigma}^p$ も $\boldsymbol{\sigma}^x$ と同時に定める．

モデル: パラメータ推定結果 1

Table 1: 株式リスクプレミアム

	AUD	CAD	EUR	JPY	NZD	NOR	SWE	CHF	GBP	USD
$\hat{\beta}^m$	1.00	1.00	1.20	0.96	0.87	1.01	1.33	0.82	0.92	0.90
$\hat{\mu}$	6.34%	6.34%	7.59%	6.10%	5.55%	6.40%	8.42%	5.22%	5.84%	5.72%

市場ポートフォリオに対する各国のベータならびにリスクプレミアムの推定結果．

Table 2: 通貨ファクターの係数

$\hat{a}_c$	$\hat{b}_c$				$\hat{a}_d$	$\hat{b}_d$			
	$\overline{fd}$	$\Delta\sigma^{FX}$	ΔTED	ΔCRB		$\overline{fd}$	$\Delta\sigma^{FX}$	ΔTED	ΔCRB
0.01	13.13	0.08	-0.88	8.44	0.00	-2.95	-0.03	0.30	-1.56

モデル: パラメータ推定結果 2

先行研究どおり，ファクターに対する感応度は通貨ごとに異なる．キャリーベータについては，低金利通貨（JPY，CHF）では負だが，高金利通貨（AUD，NZD）では正．

Table 3: 通貨のファクターベータ

通貨	キャリーベータ	ドルベータ
AUD	0.492	0.931
CAD	0.239	0.487
EUR	−0.261	1.160
JPY	−0.716	0.925
NZD	0.389	0.933
NOK	0.169	1.237
SEK	0.105	1.210
CHF	−0.421	1.119
GBP	0.152	0.821

モデル: 効用関数

投資家は消費 C_t に関する効用を最大化するように投資戦略を定める．投資家の目的関数は，以下の再帰的効用により与えられる．

$$V_t = \max_{(c_s, \boldsymbol{\alpha}_s)_{s \geq t} \in \Gamma} E_t \left[\int_t^\infty f(C_s, V_s)\, ds \,\middle|\, W_t = w, \boldsymbol{X}_t = x \right]$$

集約関数 (aggregator) $f(\cdot, \cdot)$ には以下の Epstein–Zin 選好を用いる．

$$f(C, V) = \rho \frac{(1-\gamma)V}{1-\psi^{-1}} \left[\left(\frac{C}{((1-\gamma)V)^{\frac{1}{1-\gamma}}} \right)^{1-\psi^{-1}} - 1 \right]$$

Γ は制御過程 (c, α) が取り得る空間で，c_t は消費率，α は資産比率や為替ヘッジ比率のウエイト．γ は相対リスク回避度，ψ は異時点間代替弾力性 (EIS)，ρ は割引率．ただし，$\gamma > 1$，$\psi > 0$ かつ $\psi \neq 1$，$\rho > 0$．なお，標準的な設定として $\gamma = 5$，$\psi = 0.5$，$\rho = 0.04$ とする．なお，$\gamma = 1/\psi$ のとき，集約関数は時間加法的な CRRA（相対リスク回避度一定）型効用関数と一致．

次元の呪い

- 最適化計算では，非線形関数の表現 (近似)，HJB 方程式に含まれる期待値計算，目的関数の最大化において，次元数の増加に伴い計算量が指数関数的に増大（“次元の呪い”）．Duarte, Duarte and Silva (2024) は，連続時間と強化学習を組み合わせることでこれらに対応し，高次元の計算を可能にする手法を提案．本研究でもこの手法を用いて計算を行う
- 価値関数 V と制御変数 (c, α) は状態変数に依存する．これらをニューラルネットワーク（3 隠れ層：256–128–64）で表現し，以下を満たすように交互に学習する

$$0 = \max_{(c,\alpha)\in\Gamma} f(c, V) + \mathcal{D}V$$

(policy evaluation，V の NN を更新) $\quad 0 = f(c, V) + \mathcal{D}V$

(policy improvement，(c, α) の NN を更新) $\quad (c, \alpha) = \arg\max_{(c,\alpha)\in\Gamma} f(c, V) + \mathcal{D}V$

10 資産での計算結果: 前提

- 対象国は AUD，CAD，EUR，JPY，NZD，NOR，SWE，CHF，GBP，USD．USD を除く 9 カ国については為替ヘッジ可
- ヘッジ比率は 0〜100%の範囲
- パラメータはリスク回避度 γ，異時点間代替弾力性 (EIS)ψ，割引率 ρ について，$\gamma = 5$，$\psi = 0.5$，$\rho = 0.04$

なお，2 点目ならびに 3 点目は以降の検証でも共通

10 資産での計算: 結果

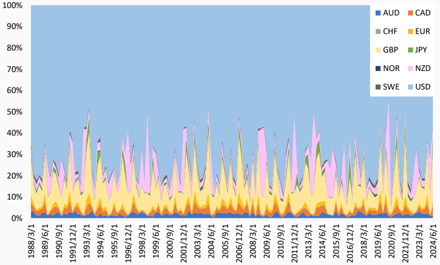

Figure 1: 株式比率の時系列推移

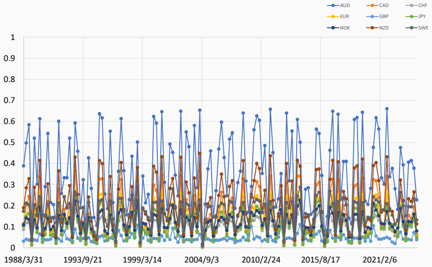

Figure 2: 為替ヘッジ比率の時系列推移

10 資産での計算: 考察

- 10 カ国の株式ならびに通貨，4 つの通貨ファクター予測変数からなる 24 次元の最適化計算が可能
- 自国にあたる米国株式の比率が圧倒的に高いが，その他では英国株式やニュージーランド株式が比較的多い
- 豪ドルやニュージーランドドル等の高金利通貨のヘッジ比率が比較的高く，日本円やスイスフラン等の低金利通貨では低い傾向

異時点間の成分の有無による違い: 前提

長期投資における最適投資比率は，近視眼的成分（長期平均である固定ウエイト+固定ウエイトからの乖離である戦術的ティルト）と異時点間の成分に分解できる

$$\begin{aligned}\text{最適投資比率} &= \text{近視眼的成分} + \text{異時点間の成分} \\ &= \text{固定ウエイト} + \text{戦術的ティルト} + \text{異時点間の成分}\end{aligned}$$

- 連続時間最適化の結果を分解し，最適投資比率と近視眼的成分の差異について考察する
- 株式ウエイトの変化による影響を除くため，以降は米国株式と外国株式 1 つの 2 資産を均等に保有するとして，外国株式の最適為替ヘッジ比率を選択する問題を考える
- 外国株式としてオーストラリア株式を採用した結果を示すが，日本株式，カナダ株式，ノルウェー株式でも同様の結果

異時点間の成分の有無による違い: 結果 1

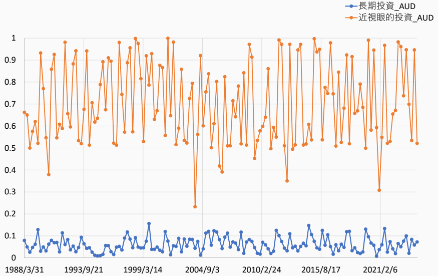

Figure 3: 長期投資ならびに近視眼的成分における為替ヘッジ比率の時系列推移

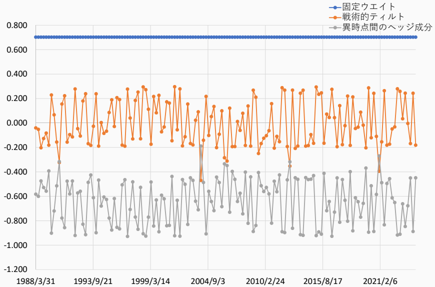

Figure 4: ヘッジ比率に対する各成分の寄与

異時点間の成分の有無による違い: 考察 1

- 近視眼的成分の為替ヘッジ比率が最適投資比率より高水準となっており，異時点間の成分は為替ヘッジ比率を押し下げる方向
- 最適投資比率における為替ヘッジ比率には異時点間の成分が戦術的ティルトより大きく影響（戦術的ティルト:−20%〜20%，異時点間の成分:−40%〜−90%）

近視眼的成分の為替ヘッジ比率が最適投資比率のそれより高水準となっている点について数式的な観点から整理すると以下が得られる

$$(\boldsymbol{\pi}_t \boldsymbol{\sigma}^s)^\top \boldsymbol{\sigma}_{\ln \xi} < 0$$

$\boldsymbol{\pi}_t$: リスク資産の比率ベクトル（本研究の設定では均等加重）

$\boldsymbol{\sigma}^s$: 為替ヘッジのリターンの分散

$\boldsymbol{\sigma}_{\ln \xi}$: 価値関数を構成する $\ln \xi(x)$ に伊藤の補題を適用したときの拡散項

異時点間の成分の有無による違い: 考察 2

$\sigma_{\ln \xi}$ は将来の不確実性が価値関数に与える影響の大きさを意味する．$\sigma_{\ln \xi}$ と σ^s が負の相関を持つことは，為替ヘッジは将来の不確実性による価値関数の変動を緩やかにする，いわば動学的不確実性に対する保険のような機能を持つことを示唆．

$\rightarrow$長期投資家は，すでに取り入れている為替ヘッジが将来の環境変化に対する保険的機能を有することを評価し，追加的に為替ヘッジを積み上げるインセンティブが小さい．一方，近視眼的投資家はその機能を過小評価することで，長期投資家と比較して追加的に為替ヘッジを積み上げてしまう

通貨ファクターによる違い: 前提

- 通貨のファクターベータがヘッジ比率に与える影響について分析
- 具体的には，ドルベータが同水準である豪ドルと日本円を比較対象として，キャリーベータを入れ替えたときの挙動を確認．また，ドルベータについても，キャリベータが同水準である加ドルとノルウェークローナで同様の確認を行う

通貨ファクターによる違い: 結果 (キャリーベータ)

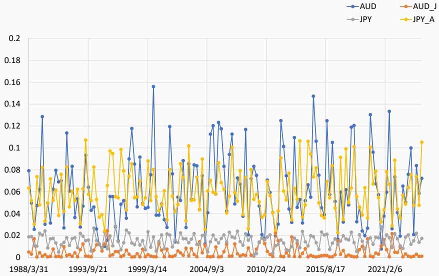

Figure 5: キャリーベータによる為替ヘッジ比率の変化 (長期投資)

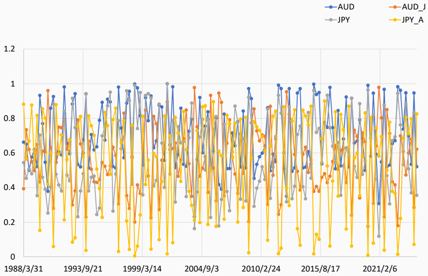

Figure 6: キャリーベータによるヘッジ比率の変化 (近視眼的投資)

通貨ファクターによる違い: 結果（ドルベータ）

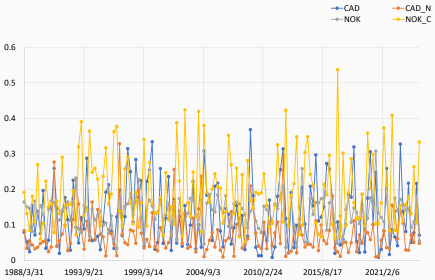

Figure 7: ドルベータによるヘッジ比率の変化 (長期投資)

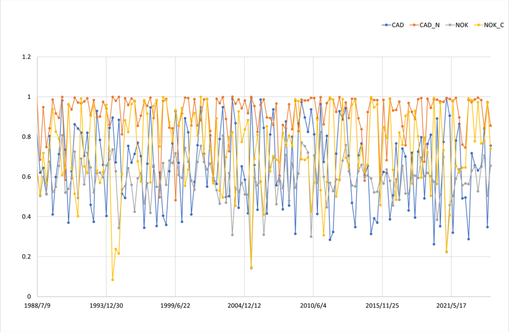

Figure 8: ドルベータによるヘッジ比率の変化 (近視眼的投資)

通貨ファクターによる違い: 考察

- キャリーベータが大きくなると最適ヘッジ比率も高くなること，キャリーベータを揃えると最適ヘッジ比率が同様の挙動を示すことがわかり，キャリーベータを通して通貨の特性が反映
- 一方で，近視眼的成分に着目すると，キャリーベータを入れ替える前から通貨の差は小さく，相対的に通貨の特性が反映されない．この結果は，通貨の特性は期待リターンの水準や分散共分散構造よりも，通貨ファクターの予測変数の不確実性とその感応度から生じる期待リターンの不確実性を通して表れることを示唆
- ドルベータについては，大きくなると最適ヘッジ比率は低くなるものの，キャリーベータほど明確ではない．この点については，ドルファクターはすべての通貨に共通する動きを反映しており、通貨間の違いが出にくいのだろう

その他: パラメータの影響

- Epstein-Zin 型効用のパラメータである γ，ψ，ρ について，$\gamma = 5$，$\psi = 0.5$，$\rho = 0.04$ が最適化結果に与える影響について確認を行ったところ，各パラメータが最適ヘッジ比率に与える影響は，異時点間の成分が与える影響 (40%から 90%) と比べると相対的に小さい
- このことは，連続時間最適化においては異時点間の成分が最も結果を左右しうる要素であることを示唆

結論

- 異時点間の成分は，近視眼的投資における変動（戦術的ティルト）やリスク回避度等のパラメータが与える影響よりも相対的に大きく，最適為替ヘッジの特徴を大きく左右
- 最適為替ヘッジ比率は，近視眼的成分のみにおける為替ヘッジ比率よりも低い．このことは，為替ヘッジという経済的行為が将来の投資機会の変動に伴う効用の変動をヘッジする効果を持つことを示唆
- ファクターベータの水準に応じて最適化の結果は大きく変化する一方で，近視眼的成分の変化は小さい．このことは，通貨の特性は期待リターンの水準や分散共分散構造といった静学的な要素よりも, 主に投資機会の変動とその感応度から生じる期待リターンの動学的不確実性を通して表れることを示唆

参考文献

Duarte, V., Duarte, D., and Silva, D. H. (2024) “Machine learning for continuous-time finance,” *Review of Financial Studies* **37**(11), 3217–3271.

Lustig, H., Roussanov, N., and Verdelhan, A. (2011) “Common risk factors in currency markets,” *Review of Financial Studies* **24**(11), 3731–3777.

Opie, W. and Riddiough, S. J. (2020) “Global currency hedging with common risk factors,” *Journal of Financial Economics* **136**(3), 780–805.

Appendix

離散時間から連続時間への変換 1

各リスク資産の対数リターンから先に求めた期待リターンを控除した残差リターンを $\boldsymbol{R}_t^p$ とおく．同様に，通貨リターンについても先に求めた期待リターンを控除した残差リターンを $\boldsymbol{R}_t^s$ とおく．つまり，

$$\boldsymbol{R}_{t+\Delta t}^p = \boldsymbol{\sigma}^p \boldsymbol{\eta}_{t+\Delta t}, \qquad \boldsymbol{R}_{t+\Delta t}^s = \boldsymbol{\sigma}^s \boldsymbol{\eta}_{t+\Delta t}$$

である．これと VAR(1) モデルの残差リターンと合わせて，$d \times d$ 次元の共分散行列を算出し，さらにコレスキー分解により直交化した共分散行列を $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ とおき，合わせて以下のように書く．

$$\boldsymbol{Y}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{Y}_t + \boldsymbol{B} \boldsymbol{\eta}_{t+\Delta t}$$

ただし，

$$\underset{(d\times 1)}{\boldsymbol{Y}_t} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_t^p \\ \boldsymbol{R}_t^s \\ \boldsymbol{X}_t \end{pmatrix}, \qquad \underset{(d\times d)}{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Psi} \end{pmatrix}$$

離散時間から連続時間への変換 2

連続時間モデルについても，$d\boldsymbol{R}_t^p$，$d\boldsymbol{R}_t^s$ を瞬間的な残差リターンとして，

$$d\boldsymbol{R}_t^p = \frac{d\boldsymbol{P}_t}{\boldsymbol{P}_t} - (\boldsymbol{\mu} + r_f \boldsymbol{\iota})\,dt, \qquad d\boldsymbol{R}_t^s = \frac{d\boldsymbol{S}_t}{\boldsymbol{S}_t} - \boldsymbol{\lambda}_t\,dt$$

とおき，変数を統合して以下のように表現する．

$$d\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}_t\,dt + \boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{Z}_t$$

ただし，

$$\underset{(d\times d)}{\boldsymbol{C}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Phi} \end{pmatrix}, \qquad \underset{(d\times d)}{\boldsymbol{D}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}^p \\ \boldsymbol{\sigma}^s \\ \boldsymbol{\sigma}^x \end{pmatrix}$$

離散時間から連続時間への変換 3

離散時間モデルと連続時間モデルのパラメータ間には，以下の関係がある．

$$\boldsymbol{\Psi} = e^{\boldsymbol{\Phi}\Delta t}$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\top = \Delta t \int_0^1 e^{\boldsymbol{C}s} \boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^\top e^{\boldsymbol{C}^\top s}\, ds$$

左辺の離散モデルの推定値 $\hat{\boldsymbol{\Psi}}$，$\hat{\boldsymbol{B}}$ を所与として，上式を満たすように，右辺の $\hat{\boldsymbol{C}}$（実際には $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$）と $\hat{\boldsymbol{D}}$ を数値的に探索する．

異時点間の成分 1

$$(\boldsymbol{\pi}_t \boldsymbol{\sigma}^s)^\top \boldsymbol{\sigma}_{\ln \xi} < 0$$

の導出の概要について述べる．

$$0 = \max_{(c,\boldsymbol{\alpha}) \in \Gamma} f(C, V(w, x)) + \mathcal{D}V(w, x)$$

における $f(C, V(w, x)) + \mathcal{D}V(w, x)$ は以下のように書くことができる．

$$f(C, V(w, x)) + \mathcal{D}V(w, x) = V(w, x)\mathcal{H}(x)$$

ただし，

$$\mathcal{H}(x) := \rho\phi \exp\left[\left(1 - \frac{1}{\psi}\right)\ln c_t + \frac{1}{\psi}\ln \xi(x) - \ln \rho\right] - \rho\phi + \mu_{\ln V} + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\sigma}_{\ln V}\|^2$$

$V(w, x)$ は負なので，以下が成り立つ．

$$0 = \max_{(c,\boldsymbol{\alpha}) \in \Gamma} f(C, V(w, x)) + \mathcal{D}V(w, x) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = \min_{(c,\boldsymbol{\alpha}) \in \Gamma} \mathcal{H}(x)$$

異時点間の成分 2

$\mathcal{H}(x)$ のうち h_t に依存する部分だけを抜き出すと

$$R(h_t) = \mu_{\ln V} + \tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{\sigma}_{\ln V}\|^2$$

これを h_t について微分する．一階条件より，最終的に h_t の最適条件

$$(\boldsymbol{\pi}_t \odot \boldsymbol{\lambda}_t) = (\boldsymbol{\pi}_t \boldsymbol{\sigma}^s)^\top (\gamma\, \boldsymbol{\sigma}_{\ln w} - a\, \boldsymbol{\sigma}_{\ln \xi})$$

が得られる． ただし，

$$a = \frac{1-\gamma}{1-\psi}$$

近視眼的成分では $\boldsymbol{\sigma}_{\ln \xi} = \mathbf{0}$ であることに注意して整理すると，近視眼的投資における最適な為替ヘッジ比率 $h_{t,\text{myopic}}$ は以下のようになる．

$$h_{t,\text{myopic}} = (\gamma(\boldsymbol{\pi}_t \boldsymbol{\sigma}^s)^\top \boldsymbol{\pi}_t \boldsymbol{\sigma}^s)^{-1} \left[\gamma(\boldsymbol{\pi}_t \boldsymbol{\sigma}^s)^\top \boldsymbol{\pi}_t \boldsymbol{\sigma}^s - (\boldsymbol{\pi}_t \odot \boldsymbol{\lambda}_t)\right]$$

異時点間の成分 3

一方，長期投資における最適為替ヘッジ比率 $\boldsymbol{h}_{t,\mathrm{long}}$ は，$\boldsymbol{\sigma}_{\ln\xi} \neq \mathbf{0}$ に注意すると

$$\boldsymbol{h}_{t,\mathrm{long}} = (\gamma(\boldsymbol{\pi}_t\boldsymbol{\sigma}^s)^\top \boldsymbol{\pi}_t\boldsymbol{\sigma}^s)^{-1}\left[\gamma(\boldsymbol{\pi}_t\boldsymbol{\sigma}^s)^\top \boldsymbol{\pi}_t\boldsymbol{\sigma}^s - a(\boldsymbol{\pi}_t\boldsymbol{\sigma}^s)^\top \boldsymbol{\sigma}_{\ln\xi} - (\boldsymbol{\pi}_t \odot \boldsymbol{\lambda}_t)\right]$$

である．両者の差を取ると

$$\boldsymbol{h}_{t,\mathrm{long}} - \boldsymbol{h}_{t,\mathrm{myopic}} = -(\gamma(\boldsymbol{\pi}_t\boldsymbol{\sigma}^s)^\top \boldsymbol{\pi}_t\boldsymbol{\sigma}^s)^{-1}(a\,(\boldsymbol{\pi}_t\boldsymbol{\sigma}^s)^\top \boldsymbol{\sigma}_{\ln\xi})$$

となる．ここで，$(\boldsymbol{\pi}_t\boldsymbol{\sigma}^s)^\top \boldsymbol{\pi}_t\boldsymbol{\sigma}^s$ が正定値であること，今回のパラメータの範囲 $(\gamma > 1, \psi < 1)$ で $a < 0$ であることから

$$\boldsymbol{h}_{t,\mathrm{long}} - \boldsymbol{h}_{t,\mathrm{myopic}} < 0$$

であるという結果は

$$(\boldsymbol{\pi}_t\boldsymbol{\sigma}^s)^\top \boldsymbol{\sigma}_{\ln\xi} < 0$$

によってもたらされていることがわかる．