地域金融機関における銀行勘定ポートフォリオ最適化

早川 功基
東京都立大学大学院経営学研究科
ファイナンスプログラム

2026 年 3 月 7 日

本発表の構成

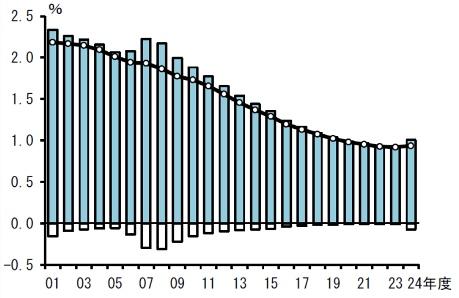
1. 背景・問題意識
2. 先行研究とバーゼル規制
3. モデル設定
4. 実証分析（日本市場への適用）
5. 分析結果（配分推移と収益）
6. 本研究の結論・今後の課題

背景・問題意識

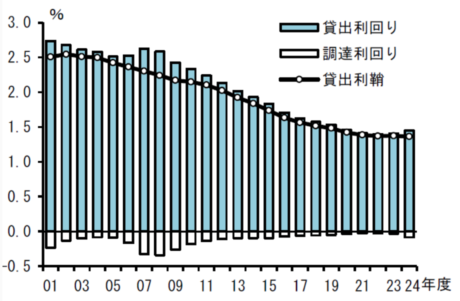
地域金融機関の収益環境

- 地域金融機関では、本業の貸出利回りの低下が続き、貸出利鞘が長期的に縮小
- 今後の金利環境次第では調達コストが先行して上がる局面も想定される。
- 貸出だけでなく、有価証券運用を含む ALM としての資産配分最適化が重要

地方銀行（国内業務部門）



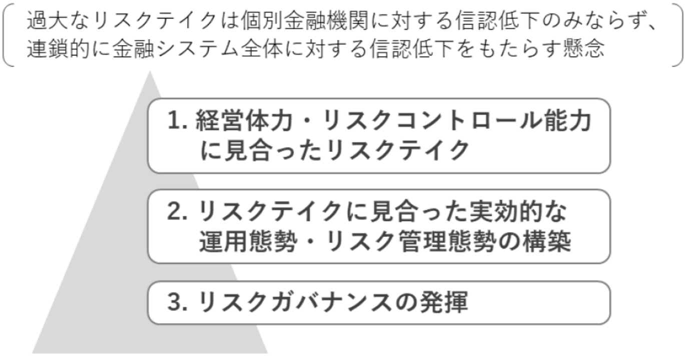
信用金庫



（注）貸出利回り＝（貸付金利息＋手形割引手数料）／貸出平均残高、調達利回り＝（資金調達費用－金利スワップ支払利息）／資金調達平均残高。
（資料）日本銀行「2024 年度の銀行・信用金庫決算」(日本銀行, 2025)。

金融当局の問題意識

- 金融庁の有価証券運用モニタリングでは、経営体力に比して市場リスクテイクが大きい先を抽出してモニタリング
- 金融当局は戦略→許容度・上限→管理・運用＋ガバナンスとした一体としての管理を重要視している。



（出所）2018年7月13日金融庁「地域銀行有価証券運用モニタリング 中間とりまとめ」

本研究の背景と目的

- 低金利の長期化と地域経済の縮小を背景に、貸出の伸び悩みが続き、本業の貸出だけで安定的に収益を確保することが難化している。
- その一方で預金の積み上がり（余剰資金）が生じやすく、資金は有価証券運用へ向かうため、貸出と有価証券運用を一体の収益源として捉える必要がある。
- そこで本研究は、貸出と有価証券運用を統合した ALM の資産配分問題として定式化し、収益性と健全性の両立の観点から、意思決定に資する配分基準を提示
- 具体的には、自己資本制約（リスクウェイト）と流動性規制（LCR ／ NSFR 等）を直接組み込み、最適配分と実配分の比較を通じて、規制設定の違いが配分・パフォーマンスに与える含意を整理する。

先行研究とバーゼル規制

銀行ポートフォリオ最適化の先行研究

- **規制制約付きの統合最適化：** 貸出と有価証券運用を統合し、規制制約＋ヒストリカルデータで「統合最適化」の性能を実証評価する枠組みを提示 (Coelho, Santos and Júdice, 2024)
  - **資本＋流動性を同時に満たす ALM：** 銀行 ALM の先駆的枠組み (Kusy and Ziemba, 1986) を踏まえつつ、資本制約と流動性制約を組み込む最適化 (Halaj, 2013)、さらに流動性・ソルベンシーの同時充足を扱う動学モデルへ拡張 (Halaj, 2016)
  - **実装可能性（調整コスト・回転率）：** 最適配分を一気に実現できない現実を、売買制約・ターンオーバー制約として取り込む整理 (Cornuejols and Tütüncü, 2006)
  - **負債側の硬直性（資金調達の脆弱性）：** コア預金の粘着性や非中核負債への依存が脆弱性に関与する観点から、負債制約を外生的に埋め込む理論的背景を構築 (Hahm, Shin and Shin, 2013)
  - **銀行ポートフォリオの統合的把握：** 資産・負債構成と収益性・金利感応度の関係を分析し、銀行ポートフォリオを一体でみる視点を提示 (Samolyk, 1989)

バーゼル規制の全体像：資本規制×流動性規制（要点）

資本規制（損失吸収力の確保）

- 損失が出ても自己資本で吸収し、金融機関の健全性を確保
- **自己資本比率**により、保有資産のリスク量に見合う資本が確保されているかを点検する。
- 比率が一定水準を下回らないよう、資本の積み増しやリスク量の抑制を促す。
- 高リスク資産を増やすほど必要資本が増え、資産配分の自由度が制約される。

流動性規制（資金繰り耐性の確保）

- **LCR**：30 日ストレス下で、HQLA（High-Quality Liquid Assets）で純流出を賄えるか（目標は 100%以上）
- 実務の要点：流入は過大評価できず、**総流出の 75%まで**に制限
- HQLA の構成上限：**Level2 合計 40%、Level2B は 15%**
- **NSFR**：1 年視点で、安定調達で資産をカバー（目標は 100%以上）

モデル設定

資産クラスと配分ベクトル

- 資産クラス集合を $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ とし [1]、配分ベクトルを

$$\boldsymbol{x} = (x_{A_1}, x_{A_2}, x_{A_3}, x_{A_4}, x_{A_5}, x_{A_6})^\top$$

と定義する。

$$\begin{aligned} &A_1 = \text{現金（預け金）}, \quad &&A_2 = \text{個人ローン（住宅ローン）}, \quad &&A_3 = \text{日本国債}, \\ &A_4 = \text{社債}, &&A_5 = \text{法人融資}, &&A_6 = \text{外国証券}. \end{aligned}$$

- 単体年度 t の最適化は、単純化して解く（非負・総和 1）。

$$\boldsymbol{x}(t) \in \Delta := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^{|A|} \mid \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} = 1\}$$

1) Coelho, Santos and Júdice (2024) では資産集合を $A = \{A_1, \dots, A_7\}$ とし、A_3 を Personal loans，A_5 を Treasury bonds（HTM）として含めている。本研究では国内データの可用性と実務上の区分に合わせ、Personal loans は住宅ローン等と統合して本研究の A_2 に含める。また、Treasury bonds（HTM）は満期保有（HTM）区分の保有残高が相対的に小さく、資産配分の主要な調整対象となりにくいことから、本研究の資産クラス集合から除外する。

目的関数：レガシーと新規フローの分解

前年末配分 $\boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{x}(t-1)$ を所与として、各資産 i の残高を

$$x_i(t) = \hat{x}_i(t) + \tilde{x}_i(t), \qquad \hat{x}_i(t) = (1-\alpha_i)\, x_i(t-1), \qquad \tilde{x}_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t) \geq 0$$

に分解（ここで、α_i：返済・再投資率）

純収益：

$$r_{\text{impl}}(\boldsymbol{x}(t)) = \sum_{i \in A} \left\{ \hat{x}_i(t)\, \hat{r}_{i,t} + \tilde{x}_i(t) \big(r_{i,t} - \overline{PD}_{i,t}\, LGD_i \big) \right\}$$

- レガシー部分：$\hat{x}_i(t)\hat{r}_{i,t}$（過去の約定条件）
- 新規フロー：$\tilde{x}_i(t)\big(r_{i,t} - \overline{PD}_{i,t} LGD_i\big)$（期待損失控除後の純マージン）

ヘアカット後 HQLA の分解（L1/L2A）

- 規制上、HQLA（High-Quality Liquid Assets）は「名目残高」ではなく、ヘアカット控除後の価値で評価する。したがって各資産は $(1-h)$ を掛けた「算入額」として集計する。
- 本研究では、最も流動性の高い L1 と、ヘアカット付きで算入される L2A に分け、HQLA を階層（L1/L2）として明示する。

ヘアカット後 HQLA（算入額）の定義：

$$L1(\boldsymbol{x}) = x_{A_1} + x_{A_3}$$
$$L2(\boldsymbol{x}) = (1 - h_{L2A})\Big(x_{A_4} + x_{A_6}\Big)$$
$$HQLA_{tot}(\boldsymbol{x}) = L1(\boldsymbol{x}) + L2(\boldsymbol{x})$$

h_{L2A}：L2A のヘアカット率（算入率は $1 - h_{L2A}$）、 $L2(\boldsymbol{x})$：L2A として算入される HQLA（算入額）の合計、（簡略版）L1 はヘアカット 0%（$h_{L1} = 0$）とみなし式から省略。L2A はヘアカット 15%として $h_{L2A} = 0.15$

HQLA の構成比制約（L1/L2）と外債比率上限制約

- 規制は「HQLA を持てばよい」ではなく、L1 の最低比率と L2 の上限を課す。そのため、$HQLA_{tot}(\boldsymbol{x})$ を基準に比率制約として明示する。
- また、外国証券はストレス時の換金性・価格変動の不確実性が大きい。L2 の中で外債に偏りすぎないよう、A_6 の占有比率に上限（κ_{A_6}）を課す。

L1/L2 比率と L2 内の外債比率の制約：

$$
\begin{aligned}
L1(\boldsymbol{x}) &\geq \theta_1 \, HQLA_{tot}(\boldsymbol{x}) \\
L2(\boldsymbol{x}) &\leq \theta_2 \, HQLA_{tot}(\boldsymbol{x}) \\
(1 - h_{L2A}) \, x_{A_6} &\leq \kappa_{A_6} \, L2(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

θ_1：L1 最低比率（$\theta_1 = 0.60$）、θ_2：L2 上限（$\theta_2 = 0.40$）、

κ_{A_6}：L2（算入額）に占める A_6（算入額）の上限比率（$\kappa_{A_6} = 0.60$）

バーゼル規制関連制約

- 自己資本比率規制：自己資本 C に対し、リスクアセット $RWA(\boldsymbol{x})$ が一定水準以下となるよう制約

$$C \geq \sum_{i \in A} RW_i\, x_i$$

- NSFR：1 年視点で安定調達 N の範囲内に、資産側の所要安定調達（線形近似）が収まるよう制約

$$N - K_2\, \nu^\top \boldsymbol{x} \geq 0$$

- カバレッジ比率（ホールセール調達のカバー）：ホールセール調達（短期性の資金）の割合 M に対し、市場性資産を一定以上保有させる近似制約

$$\sum_{i \in A} s_i\, x_i \geq K_4\, M$$

A：資産集合、x_i：資産 i の配分（$\boldsymbol{x} = (x_i)_{i \in A}$）、$C$：自己資本額、$RW_i$：リスクウェイト、$N$：安定調達、$\nu$：資産側ウェイト、$K_2$：規制水準、$S_i$：市場性資産ダミー、$M$：ホールセール調達比率、$K_4$：カバー水準

取引制約（ターンオーバー）

- 全体取引制約：前年配分からの総調整量（売買量の総和）を上限 τ で抑える

$$\sum_{i \in A} \left| x_i(t) - x_i(t-1) \right| \le \tau$$

- 個別取引制約：各資産 i の調整幅を前年配分に比例する範囲（α_i）に制約

$$-\alpha_i \, x_i(t-1) \le x_i(t) - x_i(t-1) \le \alpha_i \, x_i(t-1) \qquad (\forall i \in A)$$

$x_i(t)$：当年配分、$x_i(t-1)$：前年配分（$x_i^{(0)}$ に対応）、τ：全体の組替え上限、$\alpha_i \in [0,1]$：資産 i の調整可能割合

預貸率上限の導入

- 最適化を「利回り×リスク」だけで行うと、スプレッドが厚い貸出（A_2, A_5）に配分が偏りやすい。しかし貸出は国債等と異なり、借り手の資金需要・与信方針・預金基盤に制約され、任意の量を積み上げられない。
- そこで本研究では、貸出比率に年度別・主体別の上限を設け、実務的な ALM 制約とリスク集中（信用・流動性）の過度な偏りを抑える。

$$x_{A_2}(t) + x_{A_5}(t) \le \hat{y}_t^{cap} \quad (\equiv \ell_t)$$

$\hat{y}_t^{cap}$（ℓ_t）：年度 t にて与える貸出比率の上限（推計式により年次で更新、詳細は次節)、

A_2：個人ローン（長期保有)、A_5：法人融資

実証分析（日本市場への適用）

日本市場：各資産のデータ出所

資産	金利・利回りデータ	デフォルト関連
現金（A_1）	無担保コール O/N 物レートを年平均（日本銀行）	該当なし
個人ローン（A_2）	フラット 35 最低金利を年平均（住宅金融支援機構）	繰上償還請求債権残高／全債権残高から年次 PD を作成 (竹本, 2015)；LGD は代表値 (金融庁, 2006)
日本国債（A_3）	ベンチマーク利回り 5 年（財務省)。年次収益は価格指数・デュレーション近似等で算出	該当なし
社債（A_4）	国債利回り 5 年（財務省）＋クレジットスプレッド（Quick）を月次で合成し年次化	RDB 企業デフォルト率 (日本リスク・データ・バンク) を参照し PD を作成、LGD は代表値 (金融庁, 2006)
法人融資（A_5）	貸出約定平均金利を年平均（日本銀行）	RDB 企業デフォルト率を参照し年次 PD を作成、LGD は代表値 (金融庁, 2006)
外国証券（A_6）	FTSE 世界国債インデックス為替ヘッジあり（WGBI）の月次収益から年次化（Bloomberg）	該当なし

年次リターンの作成（資産クラス別）

売買目的（A_3，A_4，A_6）

- 月次収益 $\{r_{i,m,t}\}_{m=1}^{12}$ を **対数収益率に変換して合算**し年次収益 $R_{i,t}$ に戻す。
- 社債（A_4）は「国債利回り＋クレジットスプレッド」から月次のトータルリターン相当を合成し年次化する。

$$\rho_{i,t} = \sum_{m=1}^{12} \log(1 + r_{i,m,t}), \qquad R_{i,t} = \exp(\rho_{i,t}) - 1$$

貸出資産 （A_2，A_5）と信用コスト

- 貸出は、簿価ベースの約定金利の年平均 $\tilde{r}_{i,t}$ を **基礎収益**とする。
- **期待損失 $EL_{i,t} = PD_{i,t}\, LGD_i$ を控除**し、純収益 $R_{i,t} = \tilde{r}_{i,t} - EL_{i,t}$ を用いる。

$$EL_{i,t} = PD_{i,t} \cdot LGD_i, \qquad R_{i,t} = \tilde{r}_{i,t} - EL_{i,t}$$

（注）現金など信用リスクがない資産は $EL_{i,t} = 0$。

預貸率上限の推計

- 年度 t の上限 $\hat{y}_t^{cap}$ は、**「直前実績 y_{t-1} と時点 t で入手可能な予測マクロ経済変数 X_t^{macro}」**から推計し、最適化制約として組み込む。
- 推計は **常に $\tau \le t-1$ の観測のみ**で学習し、t 年の実績は用いない。さらに、推計値は実務域（0〜1）へ**射影（$= [0,1]$ に制限）**し、$\hat{y}_t^{cap}$ として用いる。

（1）最適化への組込み（上限制約）

$$x_{A_2}(t) + x_{A_5}(t) \le \hat{y}_t^{cap}$$

（2）上限の推計モデル（LASSO）

$$y_t = \alpha + \phi\, y_{t-1} + \beta^\top X_t^{macro} + u_t$$

y_t：預貸率上限（目的変数）、X_t^{macro}：予測マクロ（予測値）、$\hat{y}_t^{cap}$：推計後に実務域へ射影した年度別上限、

A_2：個人ローン、A_5：法人融資

（注）X_t^{macro} は JCER「ESP フォーキャスト調査」等に掲載される主要指標の予測値を使用

予測で用いるマクロ経済指標

- 予測で用いるマクロ経済指標の説明変数は 9 系列を想定したが、学習期間に欠測があった変数を除くと、本サンプル（2014–2023）で実際に回帰に投入された特徴量はマクロ経済指標 7 系列＋直前の預貸率の計 8 系列となる。

記号	解釈
y_{t-1}	直前の預貸率（自己回帰）
$\ell(g_t^N)$	名目 GDP 成長率（log(1+x)）
$\ell(g_t^R)$	実質 GDP 成長率（log(1+x)）
$\ell(q_t)$	鉱工業生産成長率（log(1+x)）
$\ell(\pi_t)$	物価上昇率（log(1+x)）
$\ell(m_t)$	マネーストック成長率（log(1+x)）
$\ell(u_t)$	失業率（log(1+x)）
$\ell(r_t)$	国債利回り（log(1+x)）

推定結果：採択頻度（2014–2023）

- 各年度 t の推定で**係数がゼロでない説明変数**を「採択」と定義
- 集計期間は 2014–2023 年（10 年）とし、信用金庫と地方銀行で同一期間を比較

記号	特徴量	SK（信用金庫）	BK（地方銀行）
y_{t-1}	直前の預貸率（`y_lag1`）	10/10	8/10
$\ell(q_t)$	鉱工業生産成長率（`IP_log1p`）	10/10	8/10
$\ell(u_t)$	失業率（`Urate_log1p`）	6/10	4/10
$\ell(g_t^N)$	名目 GDP（`NominalGDP_log1p`）	4/10	8/10
$\ell(r_t)$	国債利回り（`JGB_log1p`）	3/10	3/10
$\ell(m_t)$	マネーストック（`M2_log1p`）	1/10	7/10
$\ell(g_t^R)$	実質 GDP（`RealGDP_log1p`）	0/10	2/10
$\ell(\pi_t)$	物価（`CPI_log1p`）	0/10	0/10

最適化に投入する主なパラメータと値

項目	値
RW ベクトル	$(0,\ 0.35,\ 0,\ 1.0,\ 1.0,\ 0.2)$
LGD ベクトル	$(0,\ 0.50,\ 0,\ 0.45,\ 0.45,\ 0.45)$
HQLA ヘアカット（算入率）	$h_{L1} = 0.00$、$h_{L2A} = 0.15$（算入率は $1 - h$）
LCR 関連（複雑版）	L1 最小比 $\ell_1 = 0.60$、L2 上限比 $\ell_2 = 0.40$、A_6 の L2 占有比上限 $\kappa_{A_6} = 0.60$
LCR 関連（線形版）	$\lambda = (1.00,\ 0.00,\ 1.00,\ 0.85,\ 0.00,\ 0.85)$、$\Lambda_{\text{const}} = 0.215$、$K_1 = 1.0$
NSFR（N, K_2, ν）	$N = 0.78$、$K_2 = 1.0$、$\nu = (0,\ 0.65,\ 0.05,\ 0.10,\ 0.15,\ 0.10)$
カバレッジ比率（s, M, K_4）	$s = (1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$、$M = 0.45$、$K_4 = 1.0$
国際基準行の自己資本	$C \geq K_{\text{intl}} \langle RW, \boldsymbol{x} \rangle$、$K_{\text{intl}} = 0.08$
国内基準行の自己資本	$C \geq K_{\text{dom}} \langle RW, \boldsymbol{x} \rangle$、$K_{\text{dom}} = 0.04$
観測期間 w（期待利回り・PD）	$w = 5$ 年
全体ターンオーバー上限 τ	$\tau = 0.15$
ローカル調整率 α_{loc}	A_2, A_5 のみ 0.10、他は 1.00

（注）ベクトルの並びは資産クラス $(A_1, \ldots, A_6)$ に対応

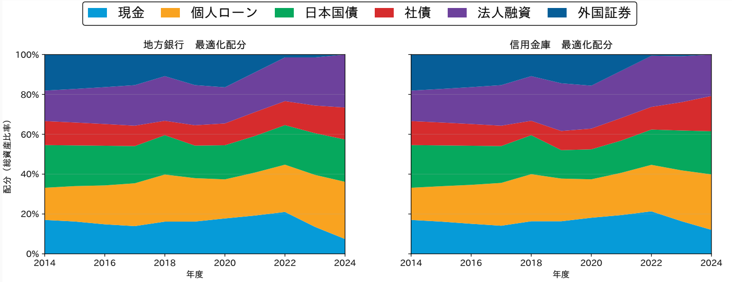
分析結果（配分推移と収益）

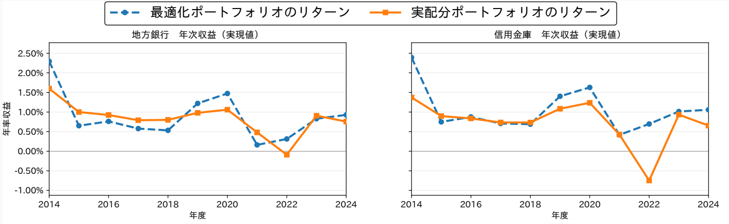
分析結果の見方

- バーゼル規制の仕様の違いが、（i）最適配分の推移と（ii）年次収益の振れにどう現れるかを比較する。
- ベースラインは、ヘアカット付き LCR と預貸率上限制約（A_2, A_5）を同時に課す仕様
- 比較として、(a) LCR を線形化した場合（Coelho, Santos and Júdice (2024) に沿う簡略化)、場合にて確認を行う。
- 実配分は日経 NEEDS Financial QUEST 等の時系列から作成

最適配分と年次収益（ベースライン）

- ヘアカット付き LCR により、現金・国債などの HQLA を一定確保しつつ分散（外債・社債への偏りを抑制）
- 年次収益（実現値）は、ショック局面の下振れを抑える一方、反発局面の上振れも一部抑える傾向
- 効果は業態で異なり、信用金庫は改善が相対的に明確、地方銀行はリスク上昇で効率改善が限定的な場合もある。





パフォーマンス比較（ベースライン）

- 結果には業態差があり、信用金庫はリスクをほぼ増やさずに効率性と累積が改善しやすい。
- 一方で地方銀行は、平均・累積が上がってもリスク上昇により効率改善が限定的になり得る。

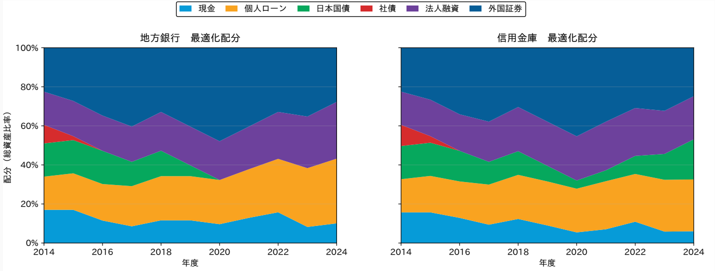
	パネル A　地方銀行			パネル B　信用金庫		
指標	最適化	実配分	差（最適化 − 実配分）	最適化	実配分	差（最適化 − 実配分）
平均リターン	0.97%	0.84%	0.13%	1.12%	0.74%	0.38%
リスク	0.59%	0.41%	0.18%	0.56%	0.56%	−0.01%
シャープレシオ	1.681	2.136	−0.455	2.080	1.354	0.726
累積リターン	11.16%	9.60%	1.57%	13.07%	8.45%	4.62%

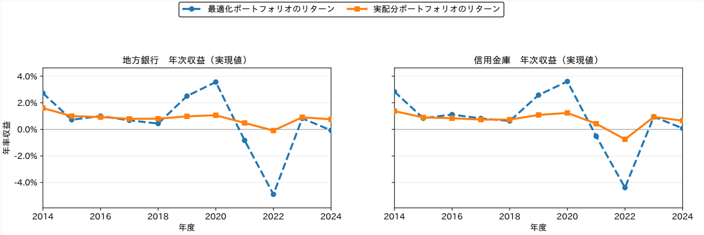
最適配分と年次収益（線形 LCR）

- 線形 LCR では分母（純流出額）を定数化し、一次不等式のみを課す：

$$\sum_i \lambda_i x_i \geq K_1 \Lambda_{\mathrm{CONST}}$$

- ベースライン対比で、現金・国債の厚みが薄くなりやすい（外債・社債が「見かけ上」通りやすい）
- 金利・スプレッド変動局面で、年次収益の振れが大きくなりやすい





パフォーマンス比較（線形 LCR）

- 線形化は平時に制約を満たしやすい一方で、ストレス時の流動性価値の毀損を直接に織り込まない。
- したがって、最適化が「収益最大化しているように見えて」もリスクイベント時の脆弱性が増え、実配分に劣後し得ることが確認される。

指標	パネル A　地方銀行 最適化	実配分	差（最適化 − 実配分）	パネル B　信用金庫 最適化	実配分	差（最適化 − 実配分）
平均リターン	0.75%	0.84%	−0.09%	0.90%	0.74%	0.16%
リスク	2.24%	0.41%	1.83%	2.11%	0.56%	1.55%
シャープレシオ	0.341	2.136	−1.795	0.433	1.354	−0.920
累積リターン	8.30%	9.60%	−1.30%	10.17%	8.45%	1.72%

本研究の結論・今後の課題

本研究の結論

- 規制と実務制約を明示的に組み込んだ銀行勘定の資産配分最適化モデルを構築し、最適配分と実配分を同一の評価軸で比較した。
- 規制制約と実務制約が同時に作用することで、最適解は「収益機会」と「規制充足」のトレードオフ上で決まる。とくにストレス局面では、HQLA の階層制約が配分調整の方向を強く規定する。
- 最適化配分の効果は平均収益の押上げというより、損失局面の緩和として現れやすい一方、反発局面の上振れも抑える傾向がある。

今後の課題

- 本研究は資産サイド中心の定式化である。預金の流出入・粘着性や、調達コストの内生化を組み込むことで、負債制約を含む意思決定に近づけられる。
- 本研究は年次の静学最適化を採用している。複数期間の動学最適化や、金利パスに応じた経路依存の制約を導入すれば、政策変化・市場シナリオの違いをより直接に評価できる。
- 貸出需要を外生とせず、貸出の増減が利回り・信用リスクに与える影響、需要制約の強さ、競争環境の変化を組み込むことで、貸出重視戦略と有価証券運用戦略の比較をより明確に定量化できる。

参考文献

Coelho, C., Santos, J. L., and Júdice, P. (2024) "The performance of bank portfolio optimization," *International Transactions in Operational Research* **31**(3), 1458–1485.

Cornuejols, G. and Tütüncü, R. (2006) *Optimization Methods in Finance*, Mathematics, Finance and Risk, New York, Cambridge University Press.

Hahm, J.-h., Shin, H. S., and Shin, K. (2013) "Noncore bank liabilities and financial vulnerability," *Journal of Money, Credit and Banking* **45**, 3–36.

Halaj, G. (2013) "Optimal asset structure of a bank – bank reactions to stressful market conditions," Working Paper Series 1533, European Central Bank, Frankfurt.

——— (2016) "Dynamic balance sheet model with liquidity risk," *International Journal of Theoretical and Applied Finance* **19**(7), 1650052.

Kusy, M. I. and Ziemba, W. T. (1986) "A bank asset and liability management model," *Operations Research* **34**(3), 356–376.

Samolyk, K. A. (1989) “Portfolio Risks and Bank Asset Choice,” Working Paper WP 89-13, Federal Reserve Bank of Cleveland https://www.clevelandfed.org/publications/working-paper/1989/wp-8913-portfolio-risks-and-bank-asset-choice.

梅谷俊治 (2020) 『しっかり学ぶ数理最適化：モデルからアルゴリズムまで』，KS 情報科学専門書，講談社．

金融庁 (2006) 「銀行法第十四条の二の規定に基づき、銀行がその保有する資産等に照らし自己資本の充実の状況が適当であるかどうかを判断するための基準」 https://www.fsa.go.jp/policy/basel_ii/index.html，金融庁告示（平成十八年金融庁告示第十九号）, 参照日：2026 年 1 月 1 日．

竹本遼太 (2015) 「住宅購入価格は年収の「5 倍」が一般的に～歴史的な低金利にもよらず、住宅ローンの返済負担が徐々に増大～」 https://www.smtri.jp/report_column/report/pdf/report_20150123.pdf，三井住友トラスト基礎研究所レポート, 参照日：2026 年 1 月 1 日．

中田和秀 (2025) 「線形回帰とロジスティック回帰（「機械学習入門」講義資料）」 講義資料，東京工業大学 中田研究室 https://www.nakatalab.iee.e.titech.ac.jp/text/pdf/ML/ML2.pdf，参照日：2026 年 1 月 1 日．

日本銀行 (2025) 「2024 年度の銀行・信用金庫決算」 https://www.boj.or.jp/research/brp/fsr/data/fsrb250725.pdf，金融システムレポート別冊シリーズ，参照日：2026 年 1 月 1 日．

補論

本研究の目的関数の導出

当年の配分（残高）を、既存（レガシー）と新規（フロー）に分解する。

$$x_i = \hat{x}_i + \tilde{x}_i \qquad (\hat{x}_i : \text{前年から残る既存部分},\ \tilde{x}_i : \text{当年に新規に積み増す部分})$$

Coelho, Santos and Júdice (2024) は、長期保有資産集合を A_L として、長期保有資産では期待損失（$PD_i LGD_i$）を控除し、それ以外は利回りのみで評価する。

$$r(x) = \sum_{i \in A_L} \left(\hat{x}_i \hat{r}_i + \tilde{x}_i r_i - x_i \, PD_i LGD_i \right) + \sum_{i \notin A_L} x_i r_i$$

本研究での変更点

本研究は、年次で直接コントロールできるのは新規フロー $\tilde{x}$ である点を重視し、期待損失の控除対象を「総残高 x」から「新規フロー $\tilde{x}$」へ切り替える。

控除対象の変更による式の変形

Coelho, Santos and Júdice (2024) の長期保有資産（$i \in A_L$）の項に $x_i = \hat{x}_i + \tilde{x}_i$ を代入すると、

$$\hat{x}_i\hat{r}_i + \tilde{x}_i r_i - x_i PD_i LGD_i = \hat{x}_i\hat{r}_i + \tilde{x}_i r_i - (\hat{x}_i + \tilde{x}_i)PD_i LGD_i$$
$$= \hat{x}_i\big(\hat{r}_i - PD_i LGD_i\big) + \tilde{x}_i\big(r_i - PD_i LGD_i\big)$$

したがって、上記の目的関数は、

- 長期保有資産では、レガシー $\hat{x}$ と新規 $\tilde{x}$ の双方から期待損失を控除
- 市場性資産（$i \notin A_L$）では、信用コストを引かず 利回りのみで評価

本研究の修正式

本研究は、年次の意思決定で直接コントロールできるのは新規フロー $\tilde{x}$ である点を重視し、期待損失の控除対象を $\tilde{x}$ のみに限定する。また、$\overline{PD}_i$ を過去 w 年平均などの年次期待デフォルト率として用いる。

$$r_{\text{impl}}(x) = \sum_{i \in A} \left\{ \hat{x}_i \hat{r}_i + \tilde{x}_i \big(r_i - \overline{PD}_i LGD_i \big) \right\}$$

- レガシー部分：$\hat{x}_i \hat{r}_i$。過去の約定条件に基づく観測利回りとして扱う。
- 新規フロー：$\tilde{x}_i (r_i - \overline{PD}_i LGD_i)$。新規に積み増す部分の純マージンを評価する。
- 非クレジット資産（現金、国債など）は $LGD_i = 0$ とおけば控除は生じない。

「どこまで最適化するか」という考え方の違い

$\hat{x}$ は前年末残高から機械的に残る部分として所与となる。実質的な最適化対象は $\tilde{x}$ であり、信用コストもその意思決定部分に帰属させる。

PCA の整理および LASSO との位置づけ

- **PCA（Principal Component Regression）は、複数の説明変数** $X_t^{macro} \in \mathbb{R}^p$ を「相関の強い方向に並べ替えて、少数の合成変数（主成分）に圧縮する」手法
- したがって PCA は「係数を決める手段」というより、回帰に入れる説明変数を作り直す（次元圧縮）のが主目的
- 一方で **LASSO** は回帰係数 β に罰則を入れて「不要な変数の係数をゼロに落とす（変数選択）」のが主目的となる。

本質的な違い（研究上の論点）

- PCA：予測精度に寄与しやすいが、元の変数が直接は残らない（解釈が難しい）
- LASSO：解釈性・説明責任（どの指標が効くか）を確保しやすいが、サンプルが短いと不安定になり得る

本研究で LASSO を採用した理由（変数選択）

- 本研究の目的は、$\hat{y}_t^{cap}$ を「当期の最適化制約」に組み込むだけでなく、「どのマクロ予測が預貸率上限の変動に効いているか」を明示することにある。
- LDR 上限は実務上「貸出需要・ビジネスモデル・マクロ経済状況」等の代理変数であり、説明可能性（説明責任）が重要となる。
  $\Rightarrow$ 係数がゼロになる LASSO は「変数選択」として自然と考えられる。

LASSO の推定（イメージ）

$$\min_{\alpha,\phi,\beta} \sum_{\tau \le t-1} \left(y_\tau - \alpha - \phi y_{\tau-1} - \beta^\top X_\tau^{macro} \right)^2 + \lambda \|\beta\|_1$$

- λ は時系列分割（例：expanding window）で外挿性能が最も良いものを採用
- もちろん「予測精度最優先」なら PCA 系（PCR 等）も合理的と思料される。
  そこでロバストネス（代替仕様）として PCA 推定も併走できる。

PCA を用いる場合の実装方針

- PCA で X^{macro} を K 次元に圧縮し、回帰は主成分で行う。

Step 1：標準化（学習データのみで平均・分散を推定）

$$\tilde{X}_\tau = D_{t-1}^{-1}\big(X_\tau^{macro} - \mu_{t-1}\big), \qquad \tau \le t-1$$

Step 2：PCA（学習データで負荷量を推定）

$$\tilde{X}_\tau \approx W_{t-1}\, z_\tau, \qquad z_\tau = W_{t-1}^\top \tilde{X}_\tau, \qquad W_{t-1} \in \mathbb{R}^{p\times K}$$

z_τ：第 1∼ K 主成分（合成説明変数）

Step 3：回帰（主成分回帰）

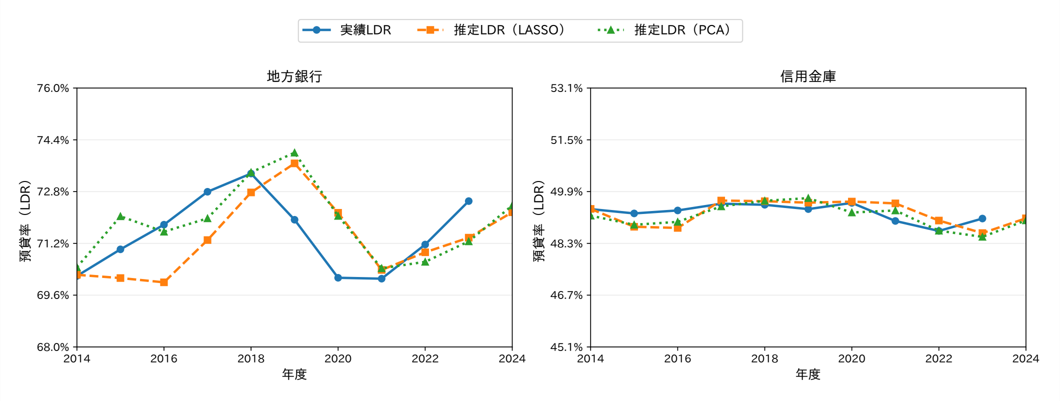
$$y_\tau = \alpha + \phi y_{\tau-1} + \gamma^\top z_\tau + u_\tau, \qquad \tau \le t-1$$

Step 4：予測と実務域への射影

$$\hat{y}_t^{cap} = \Pi_{[0,1]}\Big(\hat{\alpha} + \hat{\phi} y_{t-1} + \hat{\gamma}^\top z_t\Big), \qquad z_t = W_{t-1}^\top D_{t-1}^{-1}(X_t^{macro} - \mu_{t-1})$$

実績 LDR と推定 LDR の推移（LASSO vs PCA）

- 地方銀行は 2018–2020 年頃など水準が動く局面で誤差が出やすい。PCA は追随が良い場面があるが、LASSO は上限をやや保守的に見積もりやすい。
- 信用金庫は預貸率の変動が小さく、両手法とも概ね追随することがわかる。



逐次二次計画法（SQP）：問題設定

- 梅谷 (2020) を参考にして、本研究で主に現れる不等式制約付き最適化問題を考える：

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) \quad \text{s.t.} \quad g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m$$

- SQP は、非線形問題を「局所の二次計画（QP）の列」として解く方法である。
- 実装上は、各反復で QP を解き、探索方向 d と乗数推定値を更新する。

等式制約のみの一次必要条件（KKT の基本）

- まず原理を明確にするため、等式制約のみの場合を考える：

$$\min f(\boldsymbol{x}) \quad \text{s.t.} \quad g_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ i = 1, \ldots, m$$

- 正則性（$\nabla g_1(\boldsymbol{x}^*), \ldots, \nabla g_m(\boldsymbol{x}^*)$ が一次独立）が満たされるとき、最適解 x^* では乗数 u_i^* が存在して

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0, \qquad g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

- これは制約付き最適化の一次必要条件であり、SQP でも基本となる考え方である。

基本アイデア：局所 QP サブ問題

- 現時点 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ の近傍で、目的関数を二次近似、制約を一次近似して探索方向 $\boldsymbol{d}$ を求める。
- ラグランジュ関数を次で定義する。

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) := f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\boldsymbol{x})$$

- $\nabla^2_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{u}^{(k)})$ の対称正定値近似として $B_k \succ 0$ を用意すると、次の QP サブ問題を解く：

$$\min_{\boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^n} \ \frac{1}{2}\boldsymbol{d}^\top B_k \boldsymbol{d} + \nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)})^\top \boldsymbol{d} \quad \text{s.t.} \quad g_i(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \nabla g_i(\boldsymbol{x}^{(k)})^\top \boldsymbol{d} \le 0, \quad i = 1, \dots, m \tag{A.1}$$

二次サブ問題の KKT 条件

- (A.1) の KKT 条件（サブ問題の乗数 $v_i^{(k)} \geq 0$）は

$$B_k \boldsymbol{d} + \nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \sum_{i=1}^{m} v_i^{(k)} \nabla g_i(\boldsymbol{x}^{(k)}) = 0,$$

$$g_i(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \nabla g_i(\boldsymbol{x}^{(k)})^\top \boldsymbol{d} \leq 0, \quad v_i^{(k)} \geq 0,$$

$$v_i^{(k)} \left(g_i(\boldsymbol{x}^{(k)}) + \nabla g_i(\boldsymbol{x}^{(k)})^\top \boldsymbol{d} \right) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

- 相補性：活性な制約に対してのみ、乗数が非ゼロになりうる。
- QP サブ問題で得た乗数 $v^{(k)}$ は、元問題のラグランジュ乗数 $\boldsymbol{u}^{(k+1)}$ の推定値として用いられる。
- 本研究の SLSQP も、この種の QP 近似と KKT 条件を内部で反復的に処理する実装である。

ラインサーチとメリット関数

- 探索方向 $\boldsymbol{d}^{(k)}$ を得た後、「目的関数の減少」と「制約違反の抑制」を両立させるために、メリット関数を用いる：

$$\varphi_\rho(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \rho \sum_{i=1}^{m} \max\{g_i(\boldsymbol{x}), 0\}, \qquad \rho > 0 \tag{A.2}$$

- バックトラック等で十分減少条件を満たす $\alpha^{(k)} \in (0, 1]$ を選び、

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \boldsymbol{d}^{(k)}$$

- これにより、「制約を破りながら目的だけ下げる」更新を避けやすくなる。

BFGS によるヘッセ近似更新（Powell 修正）

- 更新量

$$s_k := \boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}$$

- ラグランジュ勾配差

$$y_k := \nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}^{(k+1)}, \boldsymbol{u}^{(k+1)}) - \nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{u}^{(k)})$$

- Powell 修正（正定性維持のため）：

$$\theta_k = \begin{cases} 1, & s_k^\top y_k \geq 0.2\, s_k^\top B_k s_k, \\ \dfrac{0.8\, s_k^\top B_k s_k}{s_k^\top B_k s_k - s_k^\top y_k}, & \text{それ以外}, \end{cases} \qquad \tilde{y}_k = \theta_k y_k + (1 - \theta_k) B_k s_k$$

- BFGS 更新：

$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k s_k s_k^\top B_k}{s_k^\top B_k s_k} + \frac{\tilde{y}_k \tilde{y}_k^\top}{s_k^\top \tilde{y}_k} \tag{A.3}$$

- $s_k^\top \tilde{y}_k > 0$ が保証されるため、$B_{k+1} \succ 0$（正定性）が保たれる。

SQP アルゴリズム

1. 初期点 $\boldsymbol{x}^{(0)}$、初期行列 $B_0 \succ 0$ を与え、$k = 0$ とする。
2. QP サブ問題 (A.1) を解き、探索方向 $\boldsymbol{d}^{(k)}$ とサブ問題の乗数 $v^{(k)}$ を得る。
3. 乗数推定値を $\boldsymbol{u}^{(k+1)} := v^{(k)}$ とおく。
4. メリット関数 (A.2) によるラインサーチで $\alpha^{(k)}$ を決め、

   $$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha^{(k)}\boldsymbol{d}^{(k)}$$

   と更新する。
5. s_k, y_k を計算し、(A.3) により B_{k+1} を更新する（Powell 修正付き BFGS）。
6. KKT 残差 $\|\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}^{(k+1)}, \boldsymbol{u}^{(k+1)})\|$、制約違反、更新量などが十分小さければ停止し、そうでなければ $k \leftarrow k + 1$ として繰り返す。

LASSO 回帰の定式化

- 中田 (2025) を参考に LASSO 回帰について説明する。
- 観測数 n、特徴量次元 p、応答 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$、設計行列 $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$、係数 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^p$
- LASSO は二乗損失に ℓ_1 正則化を加えた最小化：

$$\min_{\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^p} \|\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{w}\|_2^2 + \lambda\|\boldsymbol{w}\|_1, \qquad \|\boldsymbol{w}\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |w_i|$$

- λ が大きいほど係数が 0 に押し縮められ、変数選択（疎性）が生じやすい。
- Ridge は $\|\boldsymbol{w}\|_2^2$、Elastic Net は $\|\boldsymbol{w}\|_1 + \|\boldsymbol{w}\|_2^2$ を組み合わせている。

LASSO の二次計画表現

- QP（Quadratic Programming：二次計画問題）として表すため、補助変数 $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^p$ を導入する。

$$\min_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^p} \ \boldsymbol{w}^\top X^\top X\boldsymbol{w} - 2\boldsymbol{y}^\top X\boldsymbol{w} + \lambda\boldsymbol{e}^\top\boldsymbol{s} \quad \text{s.t.} \quad -\boldsymbol{s} \le \boldsymbol{w} \le \boldsymbol{s},$$

$$\boldsymbol{e} = (1,\ldots,1)^\top$$

- 直観：$|w_i| \le s_i$ として $\sum s_i$ を罰則にすることで ℓ_1 を線形制約に置き換える。
- 汎用 QP ソルバでも解けるが、専用解法（座標降下法・ISTA/FISTA 等）が高速なことが多い。

ISTA による LASSO の解法

- 目的関数：

$$f(\boldsymbol{w}) := \|\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{w}\|_2^2 + \lambda\|\boldsymbol{w}\|_1$$

- ISTA は、勾配更新の後にソフトしきい値を適用する反復法
- $X^\top X$ の最大固有値を ρ とすると、各反復で

$$\boldsymbol{c}^{(k)} := -X^\top(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{w}^{(k)})$$

$$w_i^{(k+1)} := S_{\lambda/(2\rho)}\left(w_i^{(k)} - \frac{1}{\rho}c_i^{(k)}\right) \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

- ソフトしきい値関数：

$$S_\alpha(x) = \begin{cases} x - \alpha, & x \geq \alpha, \\ 0, & |x| < \alpha, \\ x + \alpha, & x \leq -\alpha \end{cases}$$

- S_α は、小さい係数を 0 にし、残る係数も 0 方向に縮める。