

Hawkes 過程に従う取引事象における Market Maker のモデルリスク評価

山崎太裕

2024 年 3 月 9 日

東京都立大学 大学院経営学研究科

概要

Market Make 戦略

先行研究の紹介

研究目的

シミュレーション分析・結果

シミュレーションの準備

使用データ

シミュレーション

指値注文を常時発注可能

おわりに

補足

概要

- 研究対象

成行注文発生が Poisson 過程に従うことを前提としている
Market Maker のモデルリスク評価

- 問題提起

- I Avellaneda and Stoikov (2008) などでは、成行注文発生に Poisson 過程を想定
- II 実際の市場では成行注文発生の特徴について Poisson 過程よりも Hawkes 過程の方がより精緻に説明可能
- III 成行注文発生が
 - Poisson 過程に従う場合
 - Hawkes 過程に従う場合について、Market Maker のリスク量の違いを分析

Market Make 戦略

- Market Maker は order book の両側に指値注文を置き、両方を約定させ、非常に小さなマージンを稼ぐことを目的としている
- **bid** : 市場参加者の売り成行注文に対して Market Maker が買う価格
- **ask** : 市場参加者の買い成行注文に対して Market Maker が売る価格

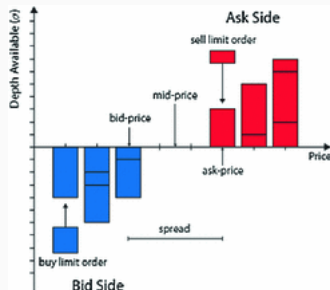


Figure 1: Tapia (2015) に示された order book

Market Maker の行動を記述するフレームワークはどのようなものか？

Market Make 戦略の設定

時刻 t で Market Maker が **bid** に指した指値注文の価格を p_t^b 、同様に **ask** に指した指値注文の価格を p_t^a とする ($\{p_t^b\}, \{p_t^a\}$ は $\{\mathcal{F}_t\}$ -可予測過程とする)。

- p_t^b, p_t^a で指値注文を発注する Market Maker を考える
- Market Maker は mid price: m_t との差 $\delta_t = (\delta_t^a, \delta_t^b)$ をコントロールする

$$\begin{aligned}\delta_t^b &:= m_t - p_t^b \\ \delta_t^a &:= p_t^a - m_t\end{aligned}\tag{1}$$

- この証券の mid price $\{m_t\}$ を用いて、定数ボラティリティ $\sigma > 0$ と標準 Brown 運動 $\{z_t\}$ により記述される、次の確率微分方程式 (2) の解とする

$$dm_t = \sigma dz_t\tag{2}$$

次に、前ページで述べた Market Maker の出す指値注文と、市場の成行注文との約定についてモデル化を行う

約定確率のモデル設定

以下、 $\psi = \{b, a\}$ とする。また、

- 売りまたは買いの成行注文の発生を表す計数過程を $\{N_t^\psi\}$ 、その強度過程を $\{\lambda_t^\psi\}$
- $\{\mathcal{F}_t\}$ -可予測な spread δ_t^ψ

とする

約定確率のモデル設定

成行注文が発生する時刻 t ごとに $\{0, 1\}$ の 2 値を取る確率変数 Δ_t^ψ を考え、

- $\Delta_t^\psi = 1$: 成行注文と Market Maker の指値注文が約定し、
- $\Delta_t^\psi = 0$: 成行注文は発生したものの指値注文とは約定しない

と考える。

$$\Delta_t^\psi = \begin{cases} 1 & \text{確率 } f^\psi(\delta_t^\psi), \\ 0 & \text{確率 } 1 - f^\psi(\delta_t^\psi) \end{cases} \quad (3)$$

さらに、 $\{N_t^\psi\}$ と $\{\delta_t^\psi\}, \{\Delta_t^\psi\}$ が独立とし、

$$dN_t^{\psi, \delta^\psi} = dN_t^\psi \times \Delta_t^\psi \quad (4)$$

と定義される N_t^{ψ, δ^ψ} を用いて Market Maker の指値注文の約定を表現する。

本研究では約定確率について以下の関数形を用いる。

$$f^\psi(\delta) = \frac{1}{\zeta^\psi} \exp(-k^\psi \delta), \quad \zeta^\psi, k^\psi > 0 \quad (5)$$

δ が大きいほど、約定する確率は小さい

先行研究の紹介 Avellaneda and Stoikov (2008)

次に、指値注文の約定に応じて Market Maker の持つ在庫 (inventory)、流動性 (cash) がどのように変動するのかモデル化する

Market Maker の設定

- Market Maker の時刻 t での inventory を q_t , cash の量を X_t とする
- 1 回の約定につき、証券 1 単位ずつ取引を行うと仮定する
- q_t, X_t は次の確率微分方程式に従う

$$dq_t = dN_t^{b, \delta^b} - dN_t^{a, \delta^a}, \quad q_0 = 0 \quad (6)$$

$$dX_t = p_t^a dN_t^{a, \delta^a} - p_t^b dN_t^{b, \delta^b}, \quad X_0 = 0 \quad (7)$$

- 時刻 t での Market Maker のポートフォリオ合計値である wealth (W_t) は次のようにかける

$$W_t := X_t + q_t m_t \quad (8) \quad 8/65$$

Market Maker の期待最大化問題

以上の定義の下で、Market Maker の期待効用最大化を考える

Market Maker の設定

指数効用を持ち最終時刻 T における期待効用を最大化する Market Maker の最適化問題を次の (9) 式で与える。

$$\max_{\{\delta_t^b\}, \{\delta_t^a\}} \mathbb{E}[-\exp(-\gamma(X_T + q_T m_T)) | \mathcal{F}_{t-}] \quad (9)$$

最適化問題

ここで、 $\{N_t^\psi\}$ が Poisson 過程であると仮定すると、マルコフ性より、(9) 式 の最適化問題は次の (10) 式の右辺のように単純化される。

$$u(m, x, q, t) :=$$

$$\max_{\{\delta_t^b\}, \{\delta_t^a\}} \mathbb{E}[-\exp(-\gamma(X_T + q_T m_T)) | m_t = m, X_{t-} = x, q_{t-} = q] \quad (10)$$

最適 spread 近似式

以上の設定の下で最適解は HJB 方程式を通じて表現され、その近似式は次の通り与えられる。

$k^a = k^b = k$ と仮定すると、次の最適 spread の近似式を得る¹。

$$\delta_t^b = \delta_b(q, t) = \left(\frac{1}{2} + q\right) \gamma \sigma^2 (T - t) + \frac{1}{\gamma} \ln \left(1 + \frac{\gamma}{k}\right), \quad (11)$$

$$\delta_t^a = \delta_a(q, t) = \left(\frac{1}{2} - q\right) \gamma \sigma^2 (T - t) + \frac{1}{\gamma} \ln \left(1 + \frac{\gamma}{k}\right) \quad (12)$$

$q(+)$: δ_t^b を広げ、 δ_t^a を狭める。 \implies inventory 数が減りやすい
 $q(-)$: δ_t^a を広げ、 δ_t^b を狭める。 \implies inventory 数が増えやすい

約定確率の変化し、inventory を 0 に近づける調整機能を担う

¹具体的な近似方法は Avellaneda and Stoikov (2008) を参照

一方、実際の市場においては Poisson 過程に従う成行注文発生という仮定は、必ずしも支持されない。

⇒ 田代・川口 (2017) では東京証券取引所における高頻度取引の注文行動に関する実証分析をおこなっている。

- 成行注文のようなインパクトの大きな注文後に連続しやすい
- 多次元 Hawkes 過程を用いて推定すると、特定の注文タイプの間に関起性が認められた

研究目的

- モデル (Avellaneda and Stoikov (2008))
 - 成行注文発生が Poisson 過程に従うことを前提とした Market Maker
 - 導出された最適 spread で Market Make をおこなう
- リスク量分析
 1. ただし、Market Maker は Poisson 過程を前提としてリスク量を推定する
 2. 一方、市場の成行注文発生の特徴は Hawkes 過程でより精緻に捉えられる
 3. Hawkes 過程を用いて推定した方が真のリスク量に対する良い近似となる可能性が高い
 4. 従って、Poisson 過程と Hawkes 過程の下でのリスク量の差をモデルリスクと定義し、これを分析

シミュレーション分析・結果

Definition

1次元計数過程 $\{N_t\}$ に対する強度過程 $\{\lambda_t\}$ が、以下の表現を持つとき $\{N_t\}$ を1次元 Hawkes 過程と呼ぶ。

$$\lambda_t = \mu + \int_0^t \phi(t-s) dN_s \quad (13)$$

ここで、 $\mu \geq 0$ は基底強度、 $\phi(t) \geq 0$ はカーネル関数と呼ばれる。今回は以下のカーネル関数 (14) 式を用いた。

$$\phi(t) = \alpha\beta \exp(-\beta t) \quad (14)$$

$$\|\phi\| := \int_0^\infty \phi(t) dt \quad (15)$$

と定義すると $\|\phi\|$ は自己励起性の強さを表している。

- 売り買いの成行注文の発生履歴
 - 2019年12月23日
 - 東芝、楽天、東京エレクトロン（東エレ）、ソニー、資生堂、トヨタ自動車、NTT、日本郵船、花王（9銘柄）
- mid price の初期値およびボラティリティ
 - Bloomberg から取得できる同日の mid price の分足データを用いる（1秒あたりのボラティリティを推定）

推定結果

Table 1: 各株式の成行注文に対して推定された Hawkes 過程パラメータ

Side	bid (売り)			ask (買い)		
銘柄	μ^b	α^b	β^b	μ^a	α^a	β^a
東芝	0.0201	0.3120	90.5951	0.0217	0.3117	151.9677
楽天	0.0761	0.2789	116.9549	0.0651	0.3555	57.3490
東エレ	0.0550	0.2438	261.6713	0.0507	0.2421	294.5740
ソニー	0.1234	0.1988	232.3451	0.0993	0.2892	161.2136
資生堂	0.0478	0.2371	233.6148	0.0499	0.2625	124.5717
トヨタ	0.0760	0.2856	217.0108	0.0571	0.3355	130.3366
NTT	0.0418	0.2834	107.4819	0.0446	0.2482	142.2726
日本郵船	0.0217	0.1764	285.5991	0.0194	0.2704	162.3361
花王	0.0373	0.3141	244.2813	0.0345	0.3408	111.1573

$$\phi^\psi(t) = \alpha^\psi \beta^\psi \exp(-\beta^\psi t)$$

β^b, β^a が比較的大きく、同程度である場合と差がある 4 銘柄を選択

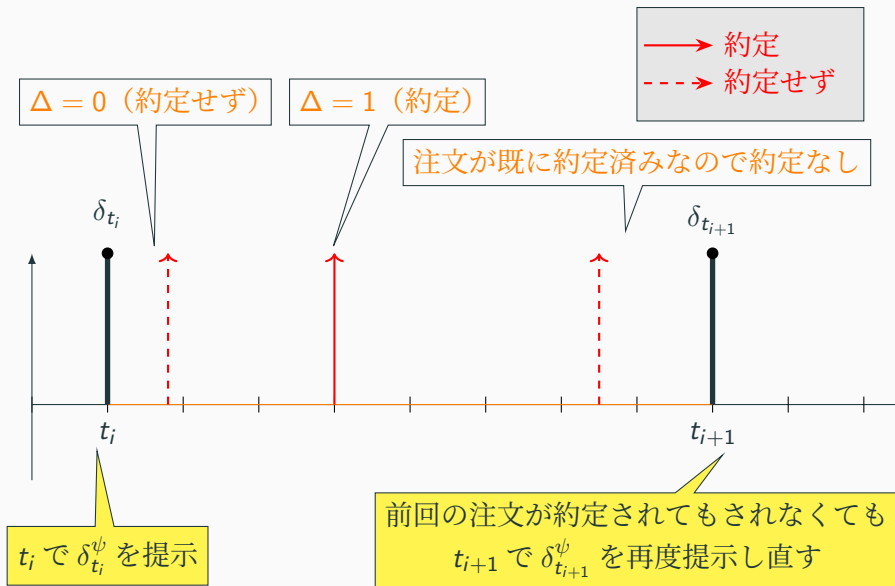
Table 2: 各株式の売り買い成行注文発生における自己励起性の強さ $\|\phi^\psi\|$ の比較

銘柄	$\ \phi^b\ $		$\ \phi^a\ $
東芝	0.3143	\approx	0.3139
楽天	0.2795	$<$	0.3554
東エレ	0.2439	\approx	0.2423
ソニー	0.1992	$<$	0.2904

Table 3: 各株式のボラティリティと mid price の初期値

銘柄	σ	m_0
東芝	0.0628	3785
楽天	0.0149	977
東エレ	0.0856	8101
ソニー	0.0403	7395
資生堂	0.0528	7875
トヨタ自動車	0.0065	1554
NTT	0.0005	111
日本郵船	0.0073	661
花王	0.0678	9124

Market Make シミュレーション図解



Market Make シミュレーションの補足

1. Market Maker は 1 区間 $[t_i, t_{i+1})$ で bid, ask に一度のみ指値注文を発注
 - 先行研究 (Gašperov and Kostanjčar (2022)) から上のよう
に設定
 - Market Maker は Poisson 過程に従う成行注文発生を想定
 - シミュレーション: $\Delta t = 5$ 秒
 - 本邦株式データによる推定: 7 秒に 1 回程度

⇒ 以上より、1 区間に 1 回としてもそれほど不自然ではない
 2. 従って、区間内に複数回の成行注文が発生しても約定できる
回数は高々 1 回
 3. 一方で、Hawkes 過程のように、自己励起性が高いとクラス
タリング効果によって区間内に注文が集中し、約定回数が下
落する可能性
- ※ ただし、これらの設定が実験結果に大きく影響する可能性がある
ため、後で常時指値注文を発注できる設定でのシミュ
レーション結果も検証

Poisson 過程と Hawkes 過程、それぞれの場合におけるリスク量について、以下を導入する

VaR と ES の定義

時刻 t の wealth: W_t の分布を F_{W_t} とすると、時刻 t での $100\alpha\%$ 水準での VaR, ES は $\alpha \in [0, 1]$ に対して次のように定義できる。

$$\text{VaR}_\alpha[W_t] := \sup\{z | F_{W_t}(z) \leq 1 - \alpha\}, \quad (16)$$

$$\text{ES}_\alpha[W_t] := \mathbb{E}[W_t | W_t \leq \text{VaR}_\alpha[W_t]] \quad (17)$$

今回は wealth だけでなく、cash: X_t も評価する。

Poisson 過程から Hawkes 過程への変化とリスク量

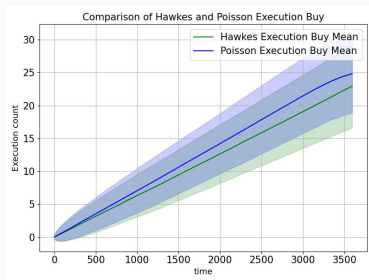
成行注文発生を Poisson 過程から Hawkes 過程に変えた際のリスク量の変化を次のようなメカニズムで整理

指標	予想	原因
約定回数	約定回数の下落	注文区間内に集中
inventory	標準偏差・尖度の減少	約定回数の下落 大きな正または負の値をとる確率も減少
cash	下側リスク (VaR,ES) の増加は不明	spread による収益の減少 (+) inventory 取得費用の減少 (-)
wealth	下側リスク (VaR,ES) の増加は不明	spread による収益の減少 (+) inventory 取得費用の減少 (-) 価格変動リスク (-)

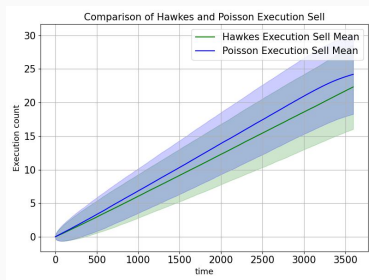
Table 4: 各リスク量の変化と原因に関する予想

(+) : リスク量の絶対値が増加、(-) : リスク量の絶対値が減少

約定回数（予想：約定回数の下落）



(a) ask の指値注文の約定回数の分布



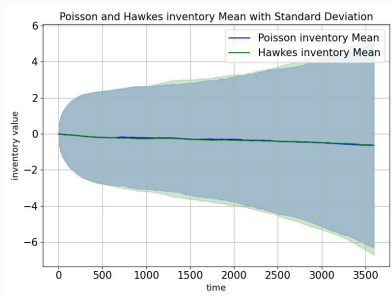
(b) bid の指値注文の約定回数の分布

Figure 2: 東芝：Hawkes 過程と Poisson 過程における約定回数の分布

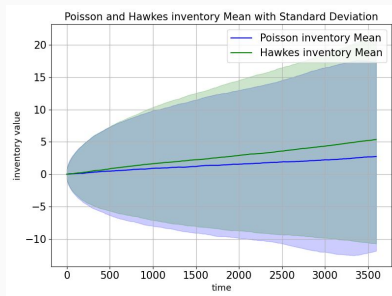
Hawkes 過程の方が Poisson 過程よりも約定回数下落している。

この特徴は他の 4 銘柄でも見られた。⇒ 予想と整合的

期中の inventory の分布（予想：標準偏差・尖度の減少）



(a) 東芝



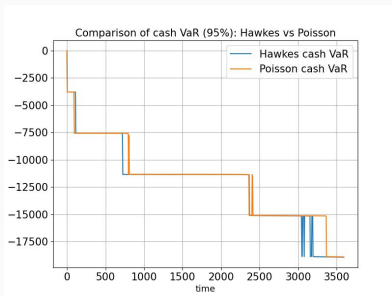
(b) 楽天

どの銘柄についても標準偏差および尖度に一貫した大小関係は見られなかった。

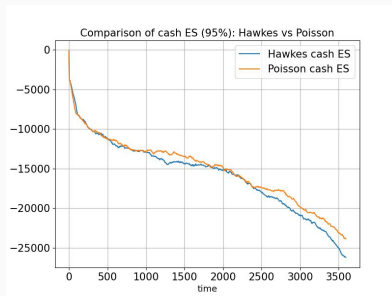
⇒ 予想と整合的でない

⇒ ただし、後で見るようにシミュレーションの設定を変更した結果も踏まえると、実は整合的であるとわかる。

期中の cash の VaR, ES (予想：不明)



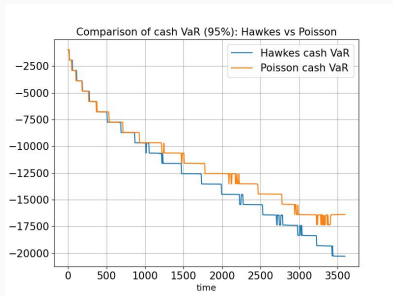
(a) 東芝：期中の cash の VaR



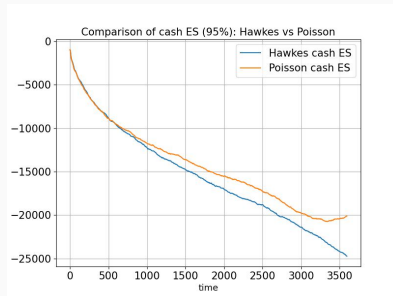
(b) 東芝：期中の cash の ES

- 東芝、東エレ、ソニーで Poisson 過程と Hawkes 過程で cash の下側リスクの大きさに差はなかった
- ただし、楽天では異なった結果となった。(次ページ)

期中の cash の VaR, ES (予想：不明)



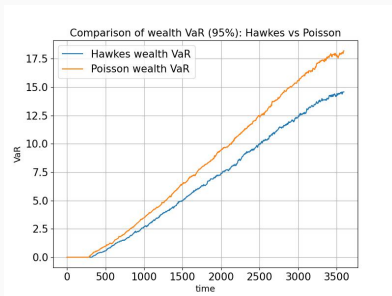
(a) 楽天：期中の cash の VaR



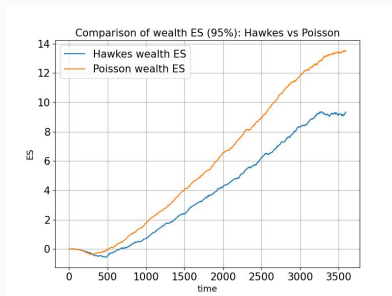
(b) 楽天：期中の cash の ES

楽天では東芝と比べて Hawkes 過程と Poisson 過程で cash の下側リスクの差が
拡大

期中の wealth の VaR, ES (予想：不明)



(a) 東芝：期中の wealth の VaR



(b) 東芝：期中の wealth の ES

4 銘柄全てで Hawkes 過程の方が Poisson 過程よりも期中で wealth の下側リスクが拡大

⇒ 約定回数下落による spread の収益の減少が支配的である可能性を示唆

1. 成行注文発生を Poisson 過程から Hawkes 過程に変化させることにより、リスク量の差が拡大
 - 1.1 約定回数下落
 - 1.2 必ずしも inventory の標準偏差・尖度の減少していない
 - 1.3 cash の下側リスクは必ずしも増加していない
 - ただし、楽天でのみリスクが増加
 - 1.4 wealth は下側リスク増加
 - ⇒ 約定回数下落による spread の収益減少が支配的である可能性を示唆

楽天におけるリスク量の違い

楽天で cash のリスク量の差が拡大している。

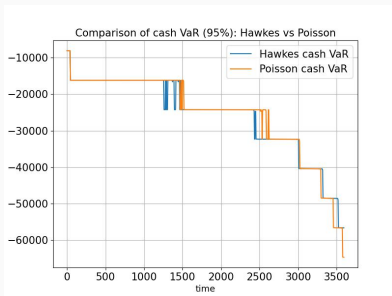
- 楽天の特徴：ボラティリティ σ が小さく、買いの自己励起性 $\|\phi^a\|$ が強い
- これらのパラメータがリスク量の差に影響している可能性
- 他の銘柄でもボラティリティと買い自己励起性を楽天のパラメータに変更し検証

買いと売りの成行注文の自己励起性が同程度であった東エレに対し変更

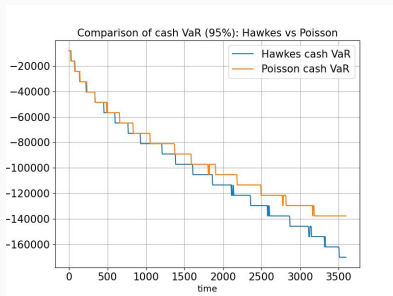
Table 5: 自己励起性の強さ $\|\phi^\psi\|$ の比較

銘柄	$\ \phi^b\ $		$\ \phi^a\ $
楽天	0.2795	<	0.3554
東エレ	0.2439	≈	0.2423

カーネルとボラティリティの変更-cash-



(a) cash の VaR (変更前)

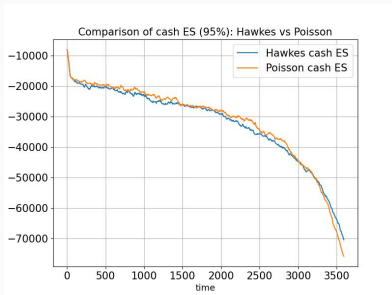


(b) cash の VaR (変更後)

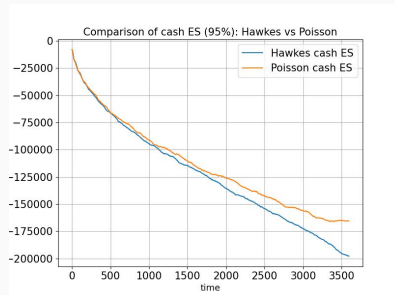
Figure 7: 東エレ：期中の cash の VaR

楽天の形状に近づき、Hawkes 過程と Poisson 過程の cash の下側リスクの差が拡大

カーネルとボラティリティの変更-cash-



(a) cash の ES (変更前)



(b) cash の ES (変更後)

Figure 8: 東エレ (変更前と変更後) : 期中の cash の ES

楽天の形状に近づき、Hawkes 過程と Poisson 過程の cash の下側リスクの差が拡大

1. σ あるいはカーネルに関するパラメータのみを別々に変えても大きな変化を見られなかった。

→ 買いの自己励起性の高さとはボラティリティの低さの相乗効果によって cash のリスク量の差が拡大することを示唆している。

2. ボラティリティが小さく、買いの自己励起性が高まるとリスク量の差が拡大する可能性

→ spread の式において inventory の調整項が σ と残存時間 $T - t$ に依存。

→ σ が小さいほど、inventory の調整項の働きが弱まる。

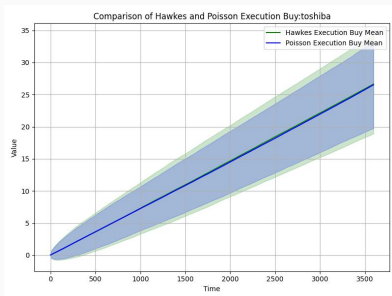
→ inventory と cash のリスク量が増加

$$\delta_t^b = \delta_b(q, t) = \left(\frac{1}{2} + q\right) \gamma \sigma^2 (T - t) + \frac{1}{\gamma} \ln \left(1 + \frac{\gamma}{k}\right), \quad (18)$$

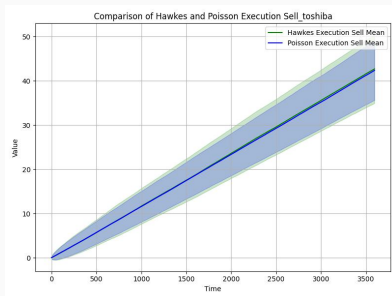
$$\delta_t^a = \delta_a(q, t) = \left(\frac{1}{2} - q\right) \gamma \sigma^2 (T - t) + \frac{1}{\gamma} \ln \left(1 + \frac{\gamma}{k}\right) \quad (19)$$

指値注文を常時発注可能

常時指値注文を発注：約定回数



(a) ask の指値注文の約定回数分布

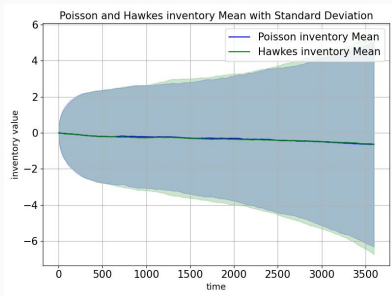


(b) bid の指値注文の約定回数分布

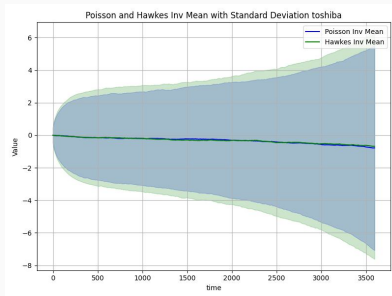
Figure 9: 東芝：Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の約定回数の分布

指値注文を常時、発注できるという設定の下では、約定回数に関しては約定回数の差は見られなくなった。

常時指値注文を発注可能：inventory の分布



(a) 東芝（区間内で1回のみ発注可能）

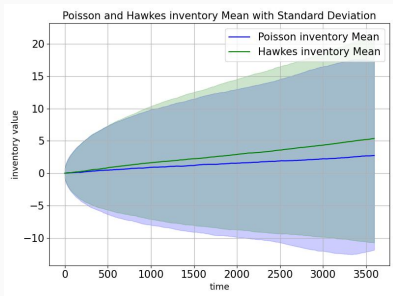


(b) 東芝（常時発注可能）

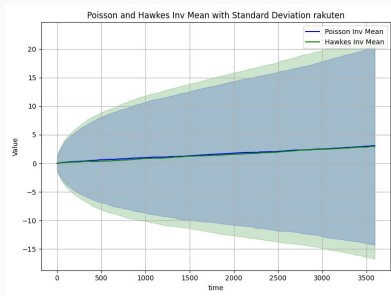
指値注文を常時発注できるという設定の下では、Poisson 過程よりも Hawkes 過程の方が inventory の標準偏差が大きくなるという結果が見られた。

⇒ 区間内での発注回数が1回のみの場合では、この結果と成行注文のクラスタリングによる標準偏差の低下が打ち消し合っていたと考えられる。

常時指値注文を発注可能：inventory



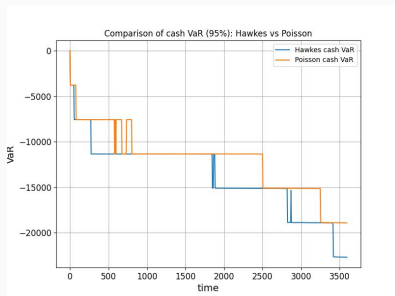
(a) 楽天（区間内で1回のみ発注可能）



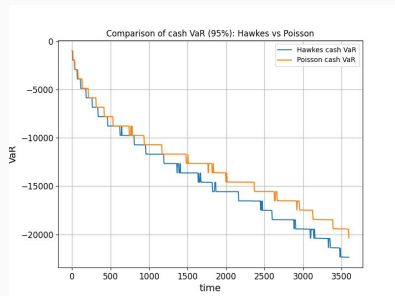
(b) 楽天（常時発注可能）

楽天についても同様に、inventory のリスクが正負ともに拡大している

常時指値注文を発注可能：cash



(a) 東芝:cash の VaR



(b) 楽天:cash の VaR

Figure 12: 東芝と楽天：Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の cash の VaR

ボラティリティが低い楽天では inventory の調整機能が働きづらい

⇒ Hawkes 過程における cash の下側リスクが拡大しやすくなっている可能性

Poisson 過程から Hawkes 過程にすることによるリスク量の変化

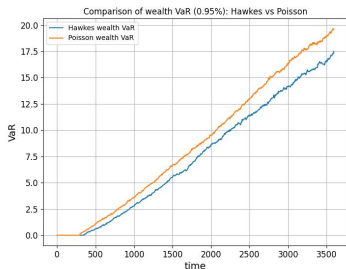
指値注文を常時発注可能な設定下での、Poisson 過程から Hawkes 過程への変更に伴うリスク量の変化を整理

指標	結果	原因
約定回数	約定回数変化なし	常時指値注文可能
inventory	(事前の予想に反して) 標準偏差・尖度の増加	クラスタリング 大きな正または負の値をとる確率も増加
cash	下側リスク (VaR,ES) の増加	inventory 取得費用の増加 (+)
指標	予想	原因
wealth	下側リスク (VaR,ES) の増加	inventory 取得費用の増加 (+) 価格変動リスク (+)

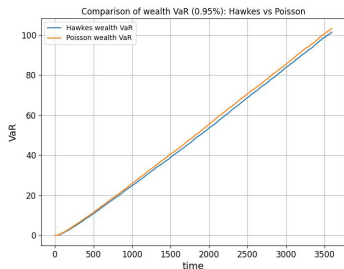
Table 6: 各リスク量の変化および予想

(+) : リスク量の絶対値が増加、(-) : リスク量の絶対値が減少

常時指値注文を発注可能：wealth（下落を予想）



(a) 東芝:wealth の VaR



(b) 楽天:wealth の VaR

- 約定回数がほぼ等しいにも関わらず Hawkes 過程において下側リスクが増加
⇒ ポジション保有による価格変動リスクの影響を示唆
- ボラティリティが低い楽天において、リスク量の差が小さいことと整合的

シミュレーションの設定によらない、本質的なモデルリスクの存在を示唆

おわりに

本研究では、

- 成行注文が Poisson 過程に従い発生すると想定し、
- Avellaneda and Stoikov (2008) の最適解に従い Market Make を行う

Market Maker について、成行注文が

- Poisson 過程に従う場合
- Hawkes 過程に従う場合

それぞれのリスク量をシミュレーションにより比較し、モデルリスクの大きさを分析した

1. Poisson 過程から Hawkes 過程に変更
→ 約定回数下落と wealth の下側リスクの増加
2. ボラティリティと買い成行注文発生自己励起性が強い
→ cash の下側リスクの増加が確認された

さらに、シミュレーション設定を

- 区間内で指値注文が1回のみ可能、から
- 区間内で指値注文を常時発注可能

に変更し、結果の頑健性を検証した

1. 平均的な約定回数の差はなくなる
2. inventory リスクの増加を確認
3. cash の下落リスクの増加
4. 平均的な約定回数の差はないものの、wealth の下側リスクの増加（ただし、ボラティリティ σ に依存）
→ 価格変動リスクによるものである可能性

これらの結果はシミュレーション設定によらない本質的なモデルリスクの存在を示唆している

- 4 銘柄という限られたケース、銘柄数を増やす。
- 特定の 1 時点でのデータを用いているため、結果の頑健性の検証
- Hawkes 過程に従う成行注文発生を想定した Market Maker の最適 spread については考慮していない。

参考文献

- Avellaneda, M. and Stoikov, S. (2008) “High-frequency trading in a limit order book,” *Quantitative Finance*, **8**(3), 217–224.
- Gašperov, B. and Kostanjčar, Z. (2022) “Deep Reinforcement Learning for Market Making Under a Hawkes Process-Based Limit Order Book Model,” *IEEE Control Systems Letters*, **6**, 2485–2490.
- Tapia, J. F. (2015) “Modeling, optimization and estimation for the on-line control of trading algorithms in limit-order markets,” Ph.D. dissertation, Université Pierre et Marie Curie – Paris VI.
- 田代雄介・川口宗紀 (2017) 「東京証券取引所における高速な注文反応の分析」, 『統計数理』, **65**(1), 87–111.

補足

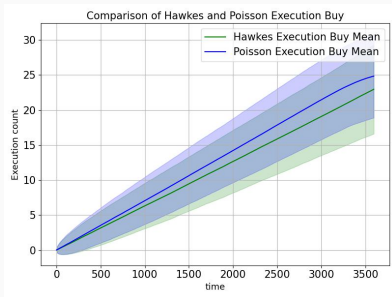
VaR と ES の定義

W_t の分布を F_{W_t} とすると、時刻 t での $100\alpha\%$ 水準での VaR, ES は $\alpha \in [0, 1]$ に対して次のように定義できる。

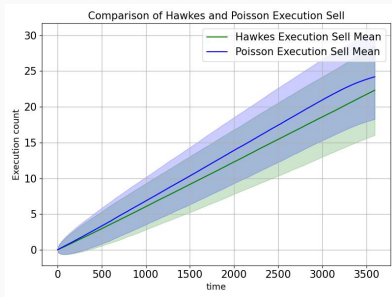
$$\text{VaR}_\alpha[W_t] := \sup\{z | F_{W_t}(z) \leq 1 - \alpha\}, \quad (20)$$

$$\text{ES}_\alpha[W_t] := \mathbb{E}[W_t | W_t \leq \text{VaR}_\alpha[W_t]] \quad (21)$$

約定回数



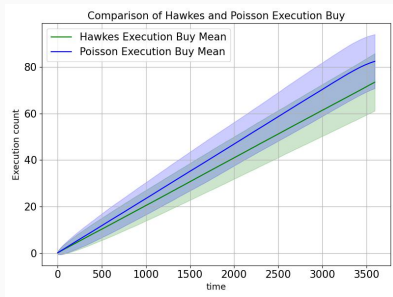
(a) ask の指値注文との約定回数の分布



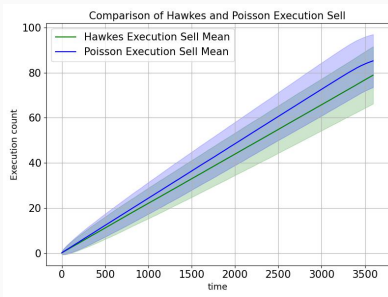
(b) bid の指値注文との約定回数の分布

Figure 14: 東芝：Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の約定回数の分布

約定回数



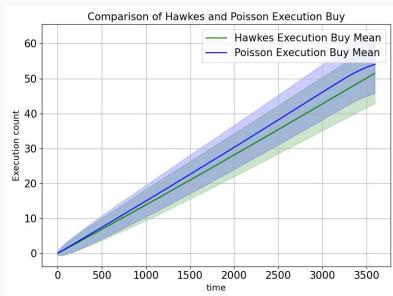
(a) ask の指値注文との約定回数の分布



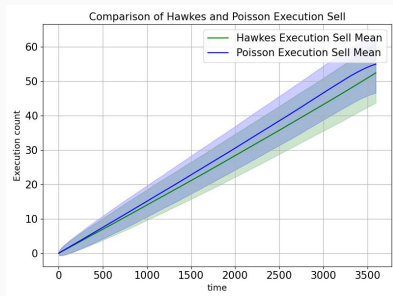
(b) bid の指値注文との約定回数の分布

Figure 15: 楽天：Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の約定回数の分布

約定回数



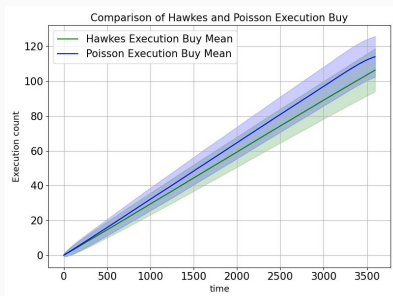
(a) Hawkes 過程と Poisson 過程における買い成行注文と ask の指値注文との約定回数の分布



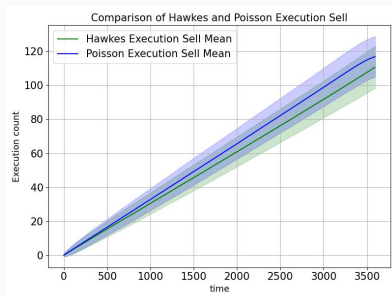
(b) Hawkes 過程と Poisson 過程における売り成行注文と bid の指値注文との約定回数の分布

Figure 16: 東京エレクトロン：Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の約定回数の分布

約定回数



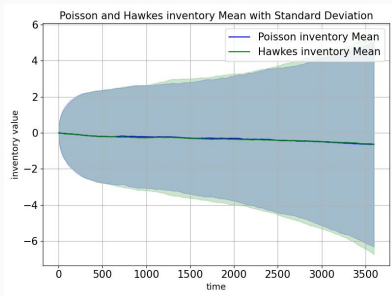
(a) Hawkes 過程と Poisson 過程における買い成行注文と ask の指値注文との約定回数の分布



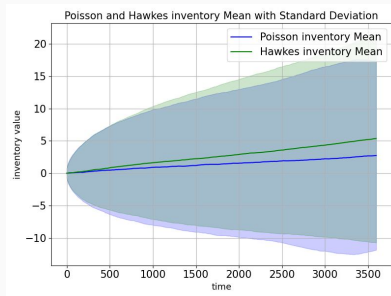
(b) Hawkes 過程と Poisson 過程における売り成行注文と bid の指値注文との約定回数の分布

Figure 17: ソニー：Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の約定回数の分布

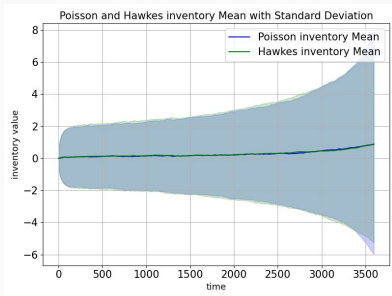
inventory



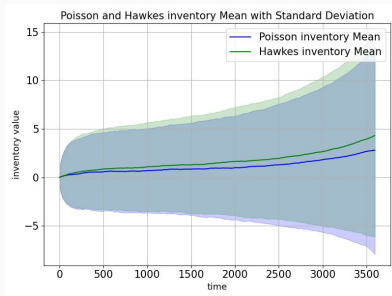
(a) 東芝：Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の inventory の分布



(b) 楽天：Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の inventory の分布

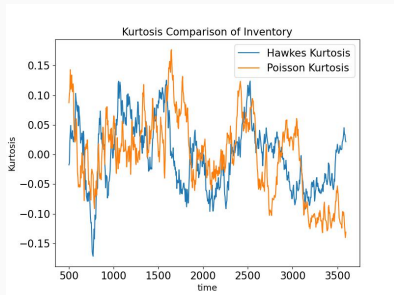


(a) 東京エレクトロン

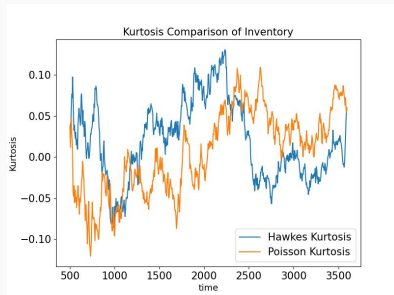


(b) ソニー

Figure 19: 4 銘柄の Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の inventory の分布

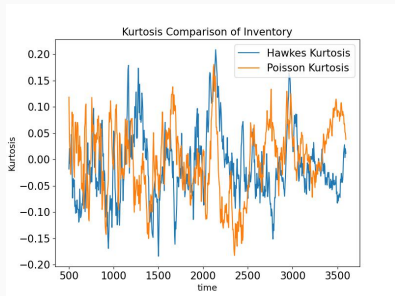


(a) 東芝

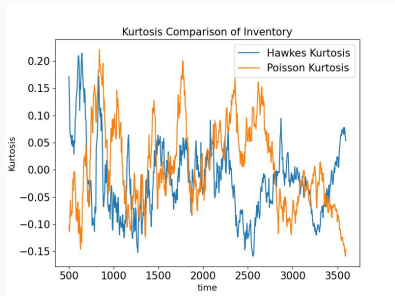


(b) 楽天

Figure 20: 4 銘柄に対する Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の inventory の尖度

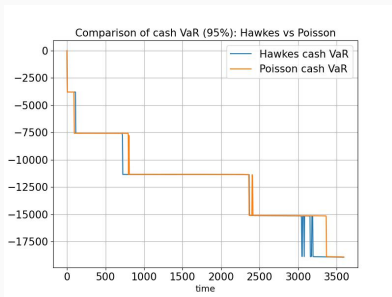


(a) 東京エレクトロン

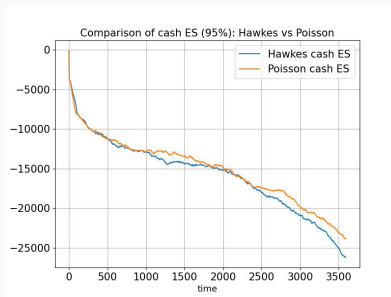


(b) ソニー

Figure 21: 4 銘柄に対する Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の inventory の尖度

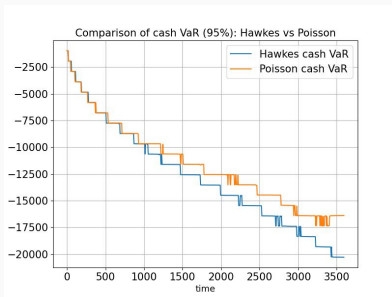


(a) Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の cash の VaR

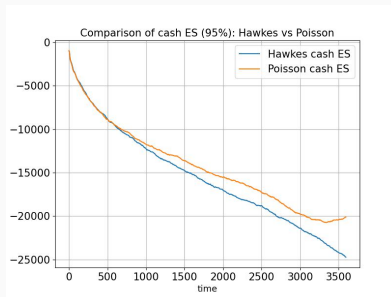


(b) Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の cash の ES

Figure 22: 東芝：Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の cash の VaR, ES

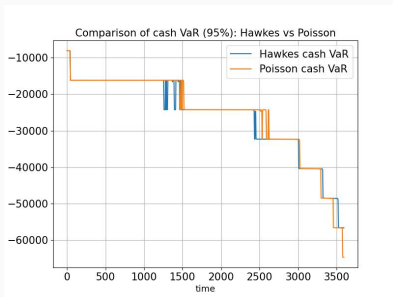


(a) Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の cash の VaR

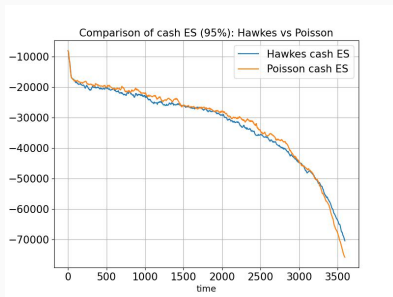


(b) Hawkes 過程と Poisson 過程における期中期末の cash の ES

Figure 23: 楽天：Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の cash の VaR, ES

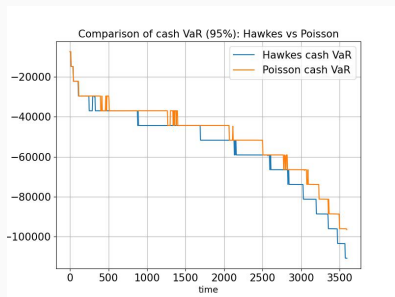


(a) Hawkes 過程と Poisson 過程における期中期末の cash の VaR

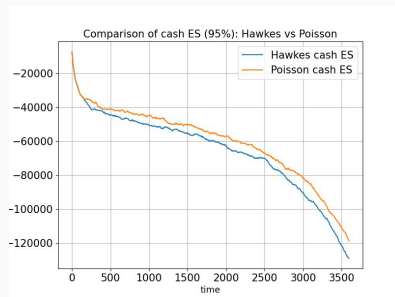


(b) Hawkes 過程と Poisson 過程における期中期末の cash の ES

Figure 24: 東京エレクトロン：Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の cash の VaR, ES

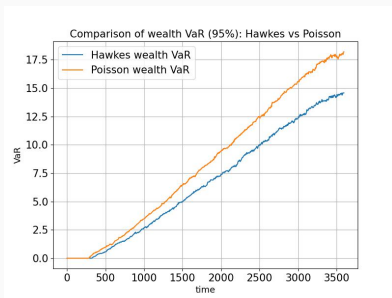


(a) Hawkes 過程と Poisson 過程における期中期末の cash の VaR

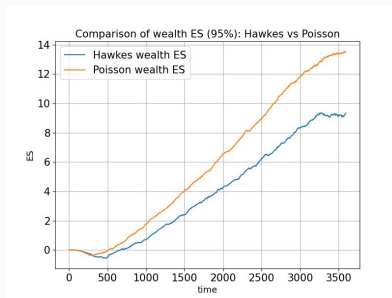


(b) Hawkes 過程と Poisson 過程における期中期末の cash の ES

Figure 25: ソニー：Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の cash の VaR, ES

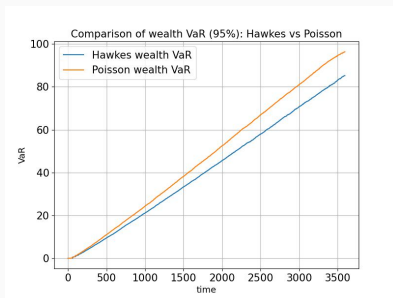


(a) Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の wealth の VaR

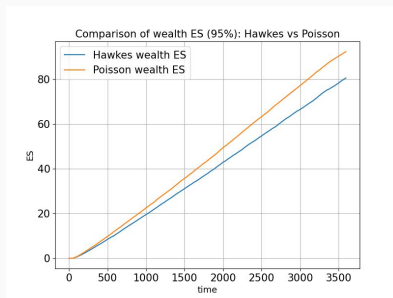


(b) Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の wealth の ES

Figure 26: 東芝：Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の wealth の VaR, ES

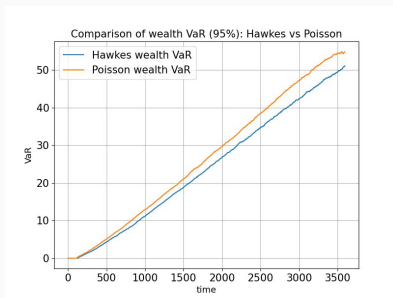


(a) Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の wealth の VaR

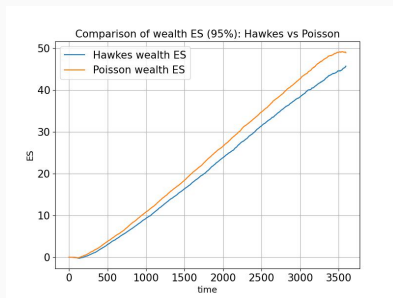


(b) Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の wealth の ES

Figure 27: 楽天：Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の wealth の VaR, ES

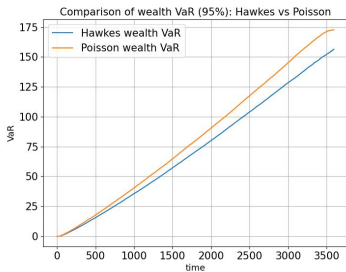


(a) Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の wealth の VaR

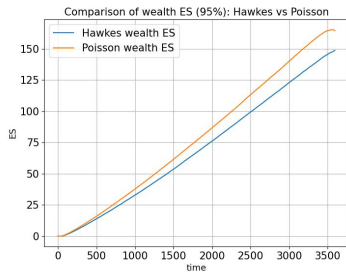


(b) Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の wealth の ES

Figure 28: 東京エレクトロン：Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の wealth の VaR, ES



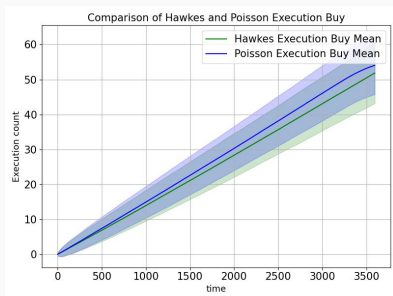
(a) Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の wealth の VaR



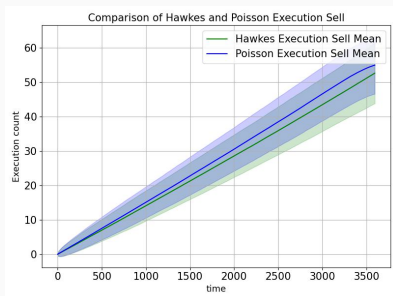
(b) Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の wealth の ES

Figure 29: ソニー：Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の wealth の VaR, ES

自己励起性に関するパラメータの変更



(a) Hawkes 過程と Poisson 過程における買い成行注文と ask の指値注文との約定回数分布



(b) Hawkes 過程と Poisson 過程における売り成行注文と bid の指値注文との約定回数分布

Figure 30: 東京エレクトロン (変更 1) : Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の約定回数分布

自己励起性に関するパラメータの変更

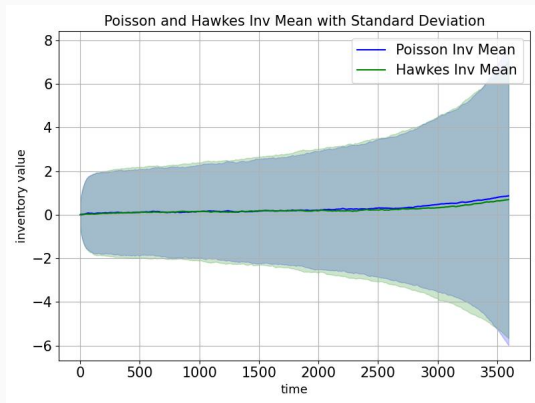
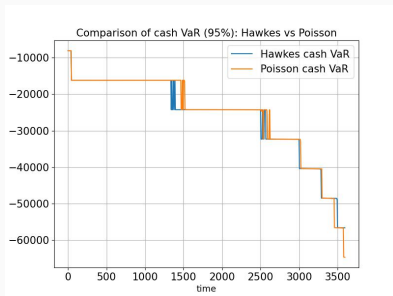
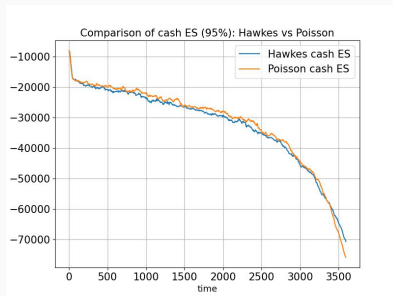


Figure 31: 東京エレクトロン (変更 1) : 期中の inventory の分布

自己励起性に関するパラメータの変更



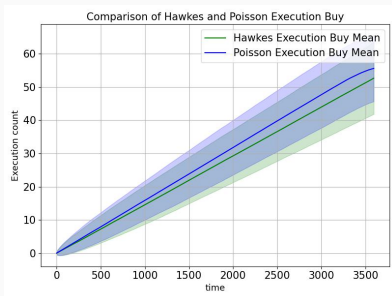
(a) Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の cash の VaR



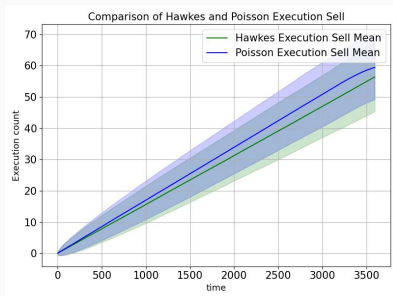
(b) Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の cash の ES

Figure 32: 東京エレクトロン (変更 1) : 期中の cash の VaR, ES

ボラティリティの変更



(a) Hawkes 過程と Poisson 過程における買い成行注文と ask の指値注文との約定回数分布



(b) Hawkes 過程と Poisson 過程における売り成行注文と bid の指値注文との約定回数分布

Figure 33: 東京エレクトロン (変更 2) : Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の約定回数分布

ボラティリティの変更

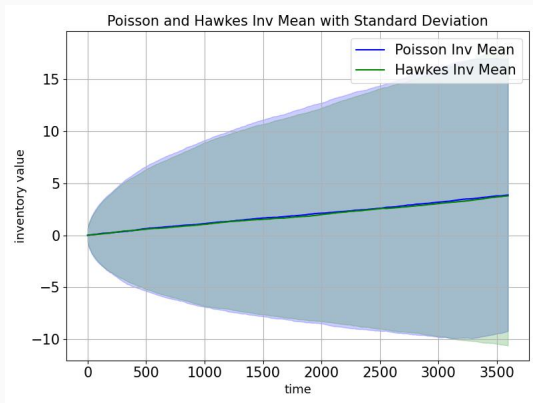
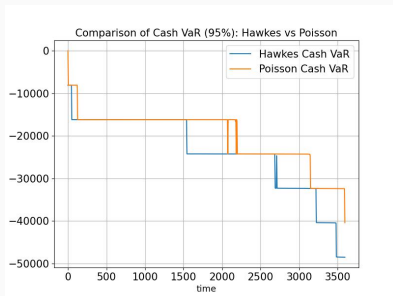
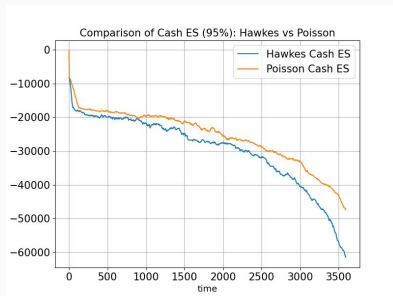


Figure 34: 東京エレクトロン (変更 2) : 期中の inventory の分布

ボラティリティの変更



(a) Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の cash の VaR



(b) Hawkes 過程と Poisson 過程における期中の cash の ES

Figure 35: 東京エレクトロン (変更 2) : 期中の cash の VaR, ES

Market Make シミュレーションの設定

1. $[0, T]$ を N 等分し $t_i := i \times \Delta t$ ($i = 0, \dots, N$), $\Delta t := T/N$ と定義する。
2. 売り、買いの成行注文に関する l 番目の発生時刻を $\tilde{t}_l^\psi \in [0, T]$ と定義し、その時刻 t_i までの履歴を $H_{t_i}^\psi := \{\tilde{t}_l^\psi | \tilde{t}_l^\psi < t_i\}$ と定義する。 $[t_i, t_{i+1})$ での成行注文の発生履歴 E_i^ψ は以下で決まる。

$$E_i^\psi := [t_i, t_{i+1}) \cap H_{t_{i+1}}^\psi \quad (22)$$

3. Market Maker は時刻 t_i で mid price m_{t_i} に対して、(11) 式、(12) 式に従って $\delta_{t_i}^{mm, \psi}$ の spread の指値注文を出す
4. 成行注文が発生する時刻 $\tilde{t}_l^\psi \in E_i^\psi$ ごとに $H_{\tilde{t}_l^\psi}^\psi$ と独立な一様分布 $U(0, 1)$ に従う確率変数 ξ_l^ψ を発生させ、いずれかの \tilde{t}_l^ψ で以下の条件が満たされるとき、時刻 \tilde{t}_l^ψ で spread $\delta_{t_i}^{mm, \psi}$ の指値注文が約定

$$\bar{\xi}_i^\psi := \frac{1}{\zeta^\psi} \exp(-k \delta_{t_i}^{mm, \psi}) > \xi_l^\psi \quad (23)$$