漸近展開法を用いた機械学習の最適ポートフォリオ問題への応用

内藤　誠 [1]　竹原　浩太 [2]

2024/3/9

[1]東京都立大学大学院　経営学研究科　経営学専攻　博士課程後期
[2]東京都立大学大学院　経営学研究科　経営学専攻

目次

モチベーション

最適ポートフォリオ問題

- 最適ポートフォリオ問題はファイナンスにおいて重要な課題の一つである
- 多期間モデルで投資収益率の確率分布が変動するような設定下では，特別な効用関数を除いてその最適ポートフォリオ問題を解くことは難しい

制約付き最適ポートフォリオ問題

- （一定の条件下で）解の存在性や一意性は示されている
- 効用関数がべき型の場合には，一般には陽に解けない
- 効用関数が対数型の場合においても，制約条件によっては陽に解けるとは限らない
- どのような最適ポートフォリオが導かれるのか，については言及されているものは少ない
- 数値的に解いているものも筆者の知る限りそう多くない

モチベーション

本研究の成果

- 数値的に制約付き最適ポートフォリオ問題を効率的に求める手法を提案する
- 本提案手法は制約付き最適ポートフォリオ問題に対して
  - 対応する BSDE 表現を利用し、さらに
    - 制約なし問題に対応する BSDE
    - それ以外の BSDE

    に分解し
  - 漸近展開法と機械学習を用いることで

  効率的に最適ポートフォリオを求める
- 数値シミュレーションの結果，従来の方法よりも効率的に最適ポートフォリオを求めることができる可能性があることを示唆

先行研究

最適ポートフォリオ問題

- Markowitz(1952): 平均分散アプローチ
- Merton(1969, 1971):
  確率制御アプローチ．ただし，このアプローチは投資機会の変動が生じる際に実行することが難しい
- Takahashi and Yoshida(2004):
  漸近展開アプローチを用いた制約なし最適ポートフォリオ問題の近似解の導出
- Cvitanic and Karatzas(1992):
  制約あり最適ポートフォリオ問題の存在性に関する証明

最適ポートフォリオ問題の BSDE 表現

- Hu et al. (2005):
  完備市場における最適ポートフォリオ問題の BSDE 表現を与える

先行研究

BSDE の数値的解法: 漸近展開法

- Takahashi and Yamada (2016), Fujii and Takahashi (2012, 2015, 2018a,b, 2019): ピカールの逐次近似と漸近展開法を組み合わせる方法や BSDE 自体を展開する方法などを提案

BSDE: DeepSolver 法

- E et al., (2017), Han et al., (2018)：
BSDE の解を機械学習手法の一つであるニューラルネットワーク（NN）モデルで表現し，多くのシミュレーションデータをモデルにインプットしトレーニングを繰り返して解く手法

先行研究

BSDE: 漸近展開法＋ DeepSolver 法

- Takahashi et al. (2021)：
  高次元の半線形偏微分方程式を効率的に解くために対応する BSDE を漸近展開法と DeepSolver 法を組み合わせて解くことで，単純な DeepSolver 法と比較して計算速度や精度が改善

漸近展開法

- Watanabe(1987)： 漸近展開法を正当化する理論を構築
- Kunitomo and Takahashi (1992, 2001, 2003), Takahashi (1999), Kim and Kunitomo (1999), Li (2014), Nishiba (2013), Osajima (2006), Shiraya, Takahashi and Toda (2011), Shiraya, Takahashi and Yamazaki (2011), Shiraya, Takahashi and Yamada(2012), Shiraya and Takahashi (2013, 2014), Takahashi and Takehara (2007, 2008a,b, 2010a,b), Takahashi and Yamada (2011, 2012) など：
  平均オプションやバスケットオプションを含む様々なオプションや，制約なし最適ポートフォリオ問題に対して漸近展開法を応用する方法を開発

問題設定

完備市場

- 資産価格 S が以下の確率微分方程式の解として表されるとする [3]．

$$dS_t = S_t(\sigma_t \theta_t dt + \sigma_t dw_t), S_0 = s > 0.$$

ただし，w は確率測度 $\mathbf{P}$ の下での 1 次元標準ブラウン運動である．

- S への投資金額を表すポートフォリオ過程 π を考え，その下での富過程 W^π を以下の確率微分方程式の解とする．

$$dW_t^\pi = \pi_t \left(\sigma_t \theta_t dt + \sigma_t dw_t\right), \quad W_0^\pi = W > 0. \tag{1}$$

[3] なお本節では簡単のために 1 次元とし，無リスク金利 r は 0 であるとしておく．一般の場合は内藤・竹原（2024b）を参照のこと．

問題設定

最適ポートフォリオ問題

- このとき，以下の期待効用最大化問題[4]を考える．

$$V(W)=\sup_{\pi:\pi_t\in\mathcal{A}}\mathbf{E}[U(W_T^\pi)]. \tag{2}$$

ただし，$\mathcal{A}\subset\mathbf{R}$ はある制約を表す閉集合である．また，期待値はすべて $\mathbf{P}$ の下で取るとする．

- さらに，集合 $C\subset\mathbf{R}$ に対して

$$\Pi_C(a):=\{b\in C||a-b|=\mathrm{dist}_C(a)\},\quad \mathrm{dist}_C(a):=\inf_{b\in C}|a-b| \tag{3}$$

とし，$C_t:=\mathcal{A}\sigma_t=\{a\sigma_t|a\in\mathcal{A}\}$ とする．ただし，C が閉集合である場合，$\Pi_C\neq\emptyset$ であることに注意する．

[4]ただし，本研究では効用関数 U はベキ型効用とする．

$$U(x)=\frac{1}{\gamma}x^\gamma,\quad x\geq 0,\quad \gamma\in(0,1).$$

最適ポートフォリオ問題の BSDE 表現

定理1（詳細は Hu et al.（2005）を参照）

価値関数は以下で与えられる．

$$V(W) = \frac{1}{\gamma} W^{\gamma} \exp(Y_0), \quad x > 0, \tag{4}$$

ただし，Y_0 は以下の BSDE の解 (Y, Z) の初期値で与えられる．

$$Y_t = 0 - \int_t^T Z_s dw_s - \int_t^T f(s, Z_s) ds. \quad t \in [0, T], \tag{5}$$

また，ドライバー f[5] と最適ポートフォリオは以下で与えられる．

$$f(t, z) = \frac{\gamma(1-\gamma)}{2} \mathrm{dist}^2_{C_t} \left(\frac{1}{1-\gamma}(z + \theta_t) \right) - \frac{\gamma |z + \theta_t|^2}{2(1-\gamma)} - \frac{1}{2}|z|^2, \tag{6}$$

$$(\pi_t^*)/W_t^{\pi^*} \in \Pi_{C_t} \left(\frac{1}{1-\gamma}(Z_t + \theta_t) \right). \tag{7}$$

[5] ドライバー f はリプシッツ性を満たさないことに注意する．

DeepSolver 法

E et al. (2017), Han et al. (2018)

機械学習を用いることで BSDE を効率的に解く方法が提案されている (以下，DeepSolver 法という)．DeepSolver 法は上記の BSDE(5) を NN を用いて以下のように解く．

$$\inf_{\hat{Y}_0, \hat{Z}} \mathbf{E}\left[\left|0 - \hat{Y}_T\right|^2\right] \tag{8}$$

ただし，$\hat{Y}_T$ は (5) 式に対応する以下の確率微分方程式のオイラー・丸山近似である．

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \hat{Z}_s dw_s + \int_0^t f(s, \hat{Z}_s) ds. \tag{9}$$

提案手法 1

BSDE の分解

一方で， 本研究では BSDE(5) を以下のように制約なし最適ポートフォリオ問題を表す BSDE と残りの BSDE に分解する．

$$Y_t^1 = 0 - \int_t^T Z_s^1 dw_s + \int_t^T f_1(s, Z_s^1) ds, \tag{10}$$

$$Y_t^2 = 0 - \int_t^T Z_s^2 dw_s + \int_t^T f_2(s, Z_s^1, Z_s^2) ds, \tag{11}$$

ただし，

$$f_1(t, z^1) = -\frac{\gamma}{2(1-\gamma)} |z^1 + \theta_t|^2 - \frac{1}{2} |z^1|^2, \tag{12}$$

$$f_2(t, z^1, z^2) = -\frac{\gamma}{2(1-\gamma)} \left(2|z^1 + \theta_t| z^2 + |z^2|^2\right) - \frac{1}{2}\left(2 z^1 z^2 + |z^2|^2\right) + \frac{\gamma(1-\gamma)}{2} \mathrm{dist}^2_{C_t}\left(\frac{1}{1-\gamma}(z^1 + z^2 + \theta_t)\right). \tag{13}$$

提案手法１

BSDE の分解

- このうち，制約なし最適ポートフォリオ問題の BSDE(10) を DeepSolver 方法で近似的に解き， その近似解 $(\hat{Y}_0^{1,*}, \hat{Z}^{1,*})$ を得る
- これらを用いつつ $(\hat{Y}_0^2, \hat{Z}^2)$ を学習することで DeepSolver 法により BSDE(5) を解く．

$$\inf_{\hat{Y}_0^2, \hat{Z}^2} \mathbf{E}\left[\left|0 - \hat{Y}_T\right|^2\right]. \tag{14}$$

ただし，$\hat{Y}_T$ は以下の確率微分方程式のオイラー・丸山近似である．

$$\tilde{Y}_t = (\hat{Y}_0^{1,*} + \hat{Y}_0^2) + \int_0^t (\hat{Z}_s^{1,*} + \hat{Z}_s^2) dw_s + \int_0^t f(s, \hat{Z}_s^{1,*} + \hat{Z}_s^2) ds. \tag{15}$$

提案手法１の有効性検証

- 以下の 2 つを比較する
- DeepSolver 法：BSDE(5) を直接 DeepSolver 法で解く方法
- 提案手法１：BSDE(10)，(11) を順に DeepSolver 法で解く方法（以下，DeepSolver+DeepSolver 法という）

数値例

数値例

資産価格の変動を表す確率微分方程式 (1) に加えて，リスクの市場価格 θ_t が時間変動することを仮定する．

$$d\theta_t = k_2(\bar{\theta} - \theta_t)dt + \varepsilon\sigma_2 dw_t, \tag{16}$$

ただし，w は (1) 式と同じ 1 次元標準ブラウン運動である．また前述の通り金利 r は 0 し，危険資産価格 S を表す (1) 式において，$\sigma_t \equiv \sigma > 0$ とする．

富 W^π は，S への投資金額であるポートフォリオ π を用いて，以下の通り書けた．

$$W_t^\pi = W + \int_0^t \frac{W_u^\pi \pi_u}{S_u} dS_u = W + \int_0^t \pi_u \sigma(\theta_u du + dw_u). \tag{17}$$

このとき，投資家は以下の期待効用最大化問題を解く．

$$V(W) = \sup_{\pi : \pi_t \in \mathcal{A}} \mathbf{E}[U(W_T^\pi)] \tag{18}$$

ただし，$\mathcal{A} := \mathbf{R}_+$ とする．すなわち非負制約を考える．

数値例

モデルの表記

- DeepSolver+DeepSolver 法では，制約なし最適ポートフォリオ問題 (10) を DeepSolver 法で解く際に学習をどこで打ち切るかが問題
- 本研究では各手法の後ろに「$\_m(m = 0, 100, 200, 1000, 2000)$」と記し問題 (10) に対する事前学習回数を記載
- 「DeepSolver+DeepSolver 法_100」
  - DeepSolver+DeepSolver 法
  - 制約なし最適ポートフォリオ問題 (10) に対して 100 回の学習を行った $(\hat{Y}_0^1, \hat{Z}^1)$ を用いる

パラメータの設定

- $\theta_0 = 0.1, \sigma = 0.2, T = 1, w_0 = 1, k_2 = 0.6950, \bar{\theta} = 0.0871, \gamma = 0.5, \sigma_2 = 0.21/0.03637 \times 2$
- 以降では，「機械学習」と言った場合，NN を用いることを意味するとする
- NN：インプット $(t, \gamma, \theta_t, \sigma)$，隠れ層 3，セル数 4, 3, 2
- 学習率：10^{-3}
- バッチノーマライゼーションを各層に適用し，最適化は Adam を使用

数値例

評価規準

- 機械学習によって得られた推定値 $(\hat{Y}_0, \hat{Z})$ から価値関数の推定値と最適ポートフォリオの推定値 $(\hat{V}_0, \hat{\pi})$ が得られる
- 一方実務上は，推定されたポートフォリオが実際に達成できる期待効用の値が重要である
- しかし，$\hat{V}_0$ と $V_0^{\hat{\pi}} = \mathbf{E}[U(W_T^{\hat{\pi}})]$ は必ずしも一致しない
- そこで本研究では，ポートフォリオ $\hat{\pi}$ に対して，以下のアウトオブサンプルでの価値関数の推定値を評価の規準とする[6]．

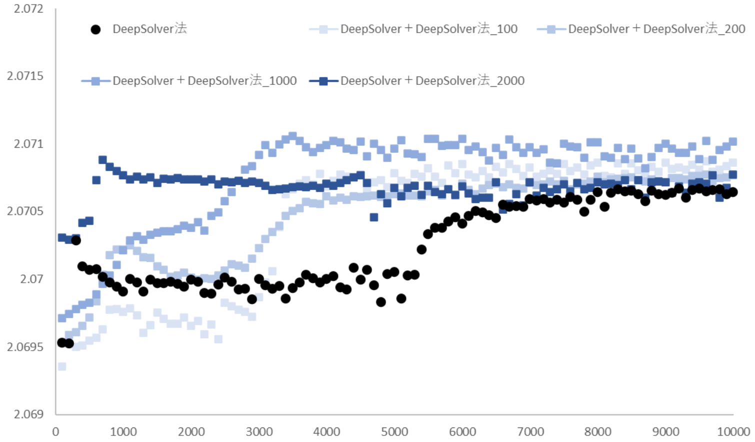
$$V^{\hat{\pi},n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U(\hat{W}_T^{\hat{\pi},i}) \approx \mathbf{E}\left[U(W_T^{\hat{\pi}})\right], \tag{19}$$

- n: アウトオブサンプルのサンプルパスの数，$\hat{W}_T^{\hat{\pi},i}$: 富過程のオイラー・丸山近似の i 番目のパスにおける実現値，Δt: オイラー・丸山近似の離散幅 $\Delta t := 1/50$

[6] その他の規準を用いた比較については，内藤・竹原（2024a）を参照．

数値例

- DeepSolver 法と比較して全ての DeepSolver+DeepSolver 法が少ないトレーニング回数で高い値を取る
- ただし，BSDE(10) に対する事前学習と，BSDE(11) に対するトレーニングと合わせて 3000 回程度が必要



提案手法２

BSDE の分解＋内藤・竹原（2024a）

- 制約なし最適ポートフォリオ問題の BSDE(10) を DeepSolver 法以外で効率的に解く方法も存在する．
- 内藤・竹原（2024a）は $\hat{Z}^{1,*}$ を漸近展開法により近似しそれを DeepSolver 法で補完することで効率的に BSDE(10) を解く方法を提案
- 具体的には

$$\hat{Z}^{1,*} = Z^{1}_{\mathrm{asy}} + \hat{Z}^{1,*}_{\mathrm{rem}} \tag{20}$$

と分解して，BSDE(10) を DeepSolver 法を用いて解く．

$$\inf_{\hat{Y}^1_0, \hat{Z}^1_{\mathrm{rem}}} \mathbf{E}\left[\left|0 - \hat{Y}^1_T\right|^2\right] \tag{21}$$

ただし，$\hat{Y}^1_T$ は以下の BSDE に対応する確率微分方程式のオイラー・丸山近似である．

$$Y^1_t = 0 - \int_t^T (Z^1_{\mathrm{asy},s} + Z^{1,*}_{\mathrm{rem},s})dw_s - \int_t^T f_1(s, Z^1_{\mathrm{asy},s} + Z^{1,*}_{\mathrm{rem},s})ds. \tag{22}$$

内藤・竹原（2024a）の手法

マルコフ型状態変数による表現

- 状態変数 X_t^ε を以下の確率微分方程式に従う 1 次元の確率過程とする．

$$dX_u^\varepsilon = v_0(X_u^\varepsilon, \varepsilon)du + v(X_u^\varepsilon, \varepsilon)dw_u, \quad X_t^\varepsilon = x.$$

ただし，$u \in [t, T]$ で，$\varepsilon \in (0, 1]$ は漸近展開に用いられるパラメータであり，$v_0 \in C_b^\infty(\mathbf{R} \times (0, 1]; \mathbf{R}), \quad v \in C_b^\infty(\mathbf{R} \times (0, 1]; \mathbf{R})$[7]．

- $\theta \in C_b^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{R})$，$\theta_u$ と σ_u は状態変数 X_u^ε により次のように決定されるとする．

$$\theta_u = \theta(X_u^\varepsilon), \quad \sigma_u = \sigma(X_u^\varepsilon).$$

ただし，$m, M > 0$ が存在して $m < \sigma(x) < M$ とする．

- また，今後の計算を簡単にするために，以下の確率微分方程式で定義される $y_t^\varepsilon = \left\{ y_{t,u}^\varepsilon : u \in [t, T] \right\}$ が一意な解を持つとする．

$$dy_{t,u}^\varepsilon = y_{t,u}^\varepsilon(\partial_x v_0(X_u^\varepsilon, \varepsilon)du + \partial_x v(X_u^\varepsilon, \varepsilon)dw_u), \quad y_{t,t}^\varepsilon = 1.$$

[7] $C_b^\infty(\mathbf{R} \times (0, 1]; E)$: 滑らかな関数 $f : \mathbf{R} \times (0, 1] \to E$ の偏微分係数 $\partial_x^n \partial_\varepsilon^m f(x, \varepsilon)$ がすべて有界であるものの集合

内藤・竹原（2024a）の手法

漸近展開法: Takahashi and Yoshida（2004）

ベキ効用の最適ポートフォリオウエイトの ε オーダーまでの漸近展開は以下で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\left(\pi_t^*\right)/W_t^{\pi^*} &= \frac{1}{1-\gamma}\theta(x)\sigma^{-1}(x) \\
&\quad + \varepsilon\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\left(\int_t^T \theta^{[0]}(u)\partial_x\theta^{[0]}(u)y_{t,u}du\right)\partial_\varepsilon v(x,0)\sigma^{-1}(x) + o(\varepsilon). \qquad (23)
\end{aligned}
$$

ただし，$\theta_u^{[0]} = \theta(X_u^\varepsilon)_{\varepsilon=0}, y_{t,u} = y_{t,u}^\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ とし，$x = X_t^\varepsilon$ で評価する．

Z_{asy}^1

このとき，Z_{asy}^1 は以下のように具体的に表現することができる．

$$
\begin{aligned}
Z_{\mathrm{asy}}^1 &= (1-\gamma)\times\left(\frac{1}{1-\gamma}\theta(x)\sigma^{-1}(x)\right. \\
&\quad \left. +\varepsilon\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\left(\int_t^T \theta^{[0]}(u)\partial_x\theta^{[0]}(u)y_{t,u}du\right)\partial_\varepsilon v(x,0)\sigma^{-1}(x)\right)\sigma(x) - \theta(x). \qquad (24)
\end{aligned}
$$

提案手法の整理：DeepSolver 法

制約付き問題の BSDE(5) を NN を用いて以下のように解く．

$$\inf_{\hat{Y}_0, \hat{Z}} \mathbf{E}\left[\left|0 - \hat{Y}_T\right|^2\right] \tag{25}$$

ただし，$\hat{Y}_T$ は (5) 式に対応する以下の確率微分方程式のオイラー・丸山近似である．

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \hat{Z}_s dw_s + \int_0^t f(s, \hat{Z}_s) ds. \tag{26}$$

提案手法の整理：DeepSolver ＋ DeepSolver 法

（1）まず，制約なし問題 (10) に対して Z^1 を学習させ DeepSolver 法で解く

$$\inf_{\hat{Y}_0^1, \hat{Z}^1} \mathbf{E}\left[\left|0 - \hat{Y}_T^1\right|^2\right] \tag{27}$$

ただし，$\hat{Y}_T^1$ は以下の BSDE に対応するオイラー・丸山近似である．

$$Y_t^1 = 0 - \int_t^T Z_s^{1,*} dw_s - \int_t^T f_1(s, Z_s^{1,*}) ds. \tag{28}$$

（2）$(\hat{Y}_0^{1,*}, \hat{Z}^{1,*})$ を (34) 式に代入し (Y_0^2, Z^2) を DeepSolver 法により求める．

$$\inf_{\hat{Y}_0^2, \hat{Z}^2} \mathbf{E}\left[\left|0 - \hat{Y}_T\right|^2\right] \tag{29}$$

ただし，$\hat{Y}_T$ は以下の確率微分方程式のオイラー・丸山近似である．

$$\tilde{Y}_t = (\hat{Y}_0^{1,*} + \hat{Y}_0^2) + \int_0^t (Z_s^{1,*} + \hat{Z}_s^2) dw_s + \int_0^t f(s, Z_s^{1,*} + \hat{Z}_s^2) ds. \tag{30}$$

提案手法の整理：漸近展開法＋ DeepSolver 法

（1） Z^1 を漸近展開法による近似 Z^1_{asy} と残りの部分 Z^1_{rem} に分け，Z^1_{rem} のみ学習する．

$$\inf_{\hat{Y}^1_0, \hat{Z}^1_{\mathrm{rem}}} \mathbf{E}\left[\left|0 - \hat{Y}^1_T\right|^2\right] \tag{31}$$

ただし，$\hat{Y}^1_T$ は以下の BSDE に対応するオイラー・丸山近似である．

$$Y^1_t = 0 - \int_t^T (Z^1_{\mathrm{asy},s} + Z^{1,*}_{\mathrm{rem},s})dw_s - \int_t^T f_1(s, Z^1_{\mathrm{asy},s} + Z^{1,*}_{\mathrm{rem},s})ds, \quad t \in [t, T]. \tag{32}$$

（2） 上記で求めた $(\hat{Y}^{1,*}_0, \hat{Z}^{1,*} = Z^1_{\mathrm{asy}} + \hat{Z}^{1,*}_{\mathrm{rem}})$ を (34) 式に代入し (Y^2_0, Z^2) を DeepSolver 法により求める．

$$\inf_{\hat{Y}^2_0, \hat{Z}^2} \mathbf{E}\left[\left|0 - \hat{Y}_T\right|^2\right] \tag{33}$$

ただし，$\hat{Y}_T$ は以下の確率微分方程式のオイラー・丸山近似である．

$$\tilde{Y}_t = (\hat{Y}^{1,*}_0 + \hat{Y}^2_0) + \int_0^t (Z^1_{\mathrm{asy},s} + \hat{Z}^{1,*}_{\mathrm{rem},s} + \hat{Z}^2_s)dw_s + \int_0^t f(s, Z^1_{\mathrm{asy},s} + \hat{Z}^{1,*}_{\mathrm{rem},s} + \hat{Z}^2_s)ds. \tag{34}$$

提案手法の整理：MV ＋ DeepSolver 法

（1）漸近展開法＋ DeepSolver 法において，Z^1 に対する漸近展開による近似 Z^1_{asy} の代わりに，平均分散（以下，MV と示す）の項である

$$Z^1_{\mathsf{MV}} := (1-\gamma) \times \frac{1}{1-\gamma}\theta(x)^\top \sigma^{-1}(x) \times \sigma(x) - \theta(x) \tag{35}$$

を用い，Z^1 をこれと残りの部分 Z^1_{rem} に分け，Z^1_{rem} を学習する方法を MV ＋ DeepSolver 法とする．

$$\inf_{\hat{Y}^1_0, \hat{Z}^1_{\mathsf{rem}}} \mathbf{E}\left[\left|0 - \hat{Y}^1_T\right|^2\right] \tag{36}$$

つまり，Z^1_{MV} は Z^1_{asy} のゼロ次部分に相当する．

（2）漸近展開法＋ DeepSolver 法と同様

先行研究（BSDE+漸近展開法）との違い

Takahashi and Yamada (2016)

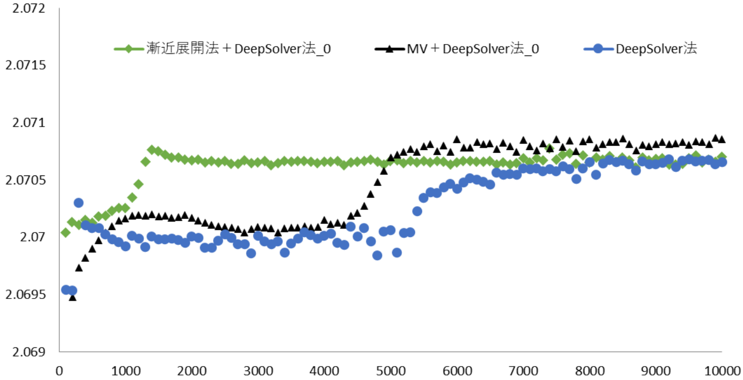
- 前提条件としてドライバー f のリプシッツ性を要求するが, 本研究の BSDE はこれを満たさない $\Rightarrow$ 簡単な例においても乖離が大きい

Fujii et al. (2019), Takahashi et al. (2021)

- BSDE 自体を単純なドライバーを持つものとそれ以外に分け，後者に機械学習を適用する際に前者を事前知識として与えている
- 一方で, 本手法では，ポートフォリオ最適化についてすでに知らている結果を事前知識として与える
- ポートフォリオを既知の部分とそれ以外に分けた上で後者に機械学習を適用する際に前者を事前知識として与えている
- 同じ漸近展開法を応用する手法であっても問題の分解方法や与える事前知識に違いがある
- 特に，Takahashi et al. (2021) については今回の設定では DeepSolver 法に帰着される

数値例: 事前学習回数が 0 の場合

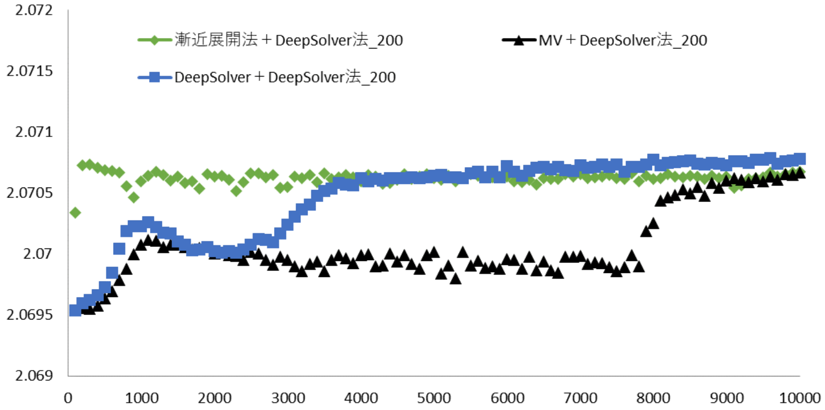
- 漸近展開法+DeepSolver 法と MV+DeepSolver 法はともに DeepSolver 法よりも総じて高い期待効用を取る [8]
- 5000 回程度までのトレーニング回数では漸近展開法+ DeepSolver 法が，MV+DeepSolver 法をアウトパフォーム
- 漸近展開法の 1 次の情報の重要性を示唆



[8] ただし，$m = 0$ の場合，制約なし問題 (10) に対する学習を一切行わないため，DeepSolver+DeepSolver 法と単なる DeepSolver 法が一致する

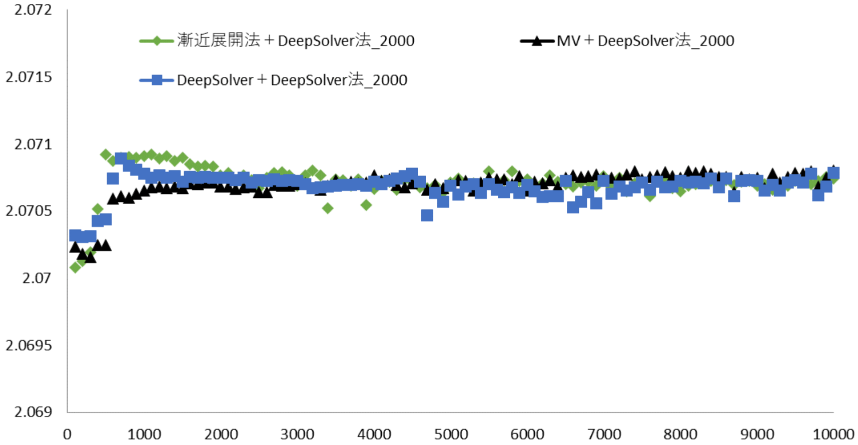
数値例: 事前学習回数が 200 の場合

- 事前学習回数が 0 の場合と同様の結果
- 一方で，漸近展開法+DeepSolver 法と同水準を達成するために，DeepSolver+DeepSolver 法では 4,000 回程度，MV+DeepSolver 法では 8,000 回程度のトレーニングが必要



数値例: 事前学習回数が 2000 の場合

- 各手法間で差が生じにくくなっている
- これは制約なし最適ポートフォリオ問題（内藤・竹原 (2024a)）と整合的



まとめ

まとめ

- 本研究では最適ポートフォリオを漸近展開法により近似し DeepSolver 法で補完する新しい方法を提案した
- BSDE を制約なし最適ポートフォリオ問題に対応する BSDE とそれ以外の BSDE に分解し，別々に問題を解くことで効率的にポートフォリオを求めることができる可能性がある
- さらに，制約なし最適ポートフォリオ問題に対応する BSDE を内藤・竹原（2024a）の手法を用いることでさらに効率的に求められる可能性を示唆

今後の課題

- 漸近展開法の精度の向上
- 実務的に重要なより多くの例で本提案手法の有効性の頑健性を確認

参考文献

- 内藤誠・竹原浩太 (2024a) 「制約なし最適ポートフォリオの機械学習による応用」, working paper.
- 内藤誠・竹原浩太 (2024b) 「漸近展開法を用いた機械学習による制約付き最適ポートフォリオ問題への応用」, working paper.
- Detemple, J. R., Garcia, J. R. and Rindisbacher, M. (2003) "A Monte Carlo Method for Optimal Portfolios," *The Journal of Finance*, 58, 401–446.
- E, W., Han, J. and Jentzen, A. (2017) "Deep learning-based numerical methods for high-dimensional parabolic partial differential equations and backward stochastic differential equations," *Commun. Math. Stat.*, 5(4), 349–380.
- Fujii, M. and Takahashi, A. (2012) "Analytical approximation for non-linear FBSDEs with perturbation scheme," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 15, 5, 1250034 (24).
- Fujii, M. and Takahashi, A. (2015) " Perturbative expansion technique for non-linear FBSDEs with interacting particle method," *Asia-Pacific Financial Markets*, 22(3), 283-304.
- Fujii, M. and Takahashi, A. (2018a) "Solving backward stochastic differential equations with quadratic-growth drivers by connecting the short-term expansions, " *Stochastic Processes and their Applications*, in press.
- Fujii, M. and Takahashi, A. (2018b) "Quadratic-exponential growth BSDEs with jumps and their Malliavin ' s differentiability, " *Stochastic Processes and their Applications*, 128(6), 2083–2130.
- Fujii, M. and Takahashi, A. (2019a) "Asymptotic Expansion for Forward-Backward SDEs with Jumps, " *Stochastics*, 91(2), 175–214.

Fujii, M. and Takahashi, A. (2019b) "Asymptotic Expansion as Prior Knowledge in Deep Learning Method for High dimensional BSDEs, " *Asia-Pac Financ Markets*, 26, 391–408.

Han, J., Jentzen, A. and E, H. (2018) "Solving high-dimensional partial differential equations using deep learning," *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 115(34), 8505–8510.

Hu, Y., Imkeller, P. and Müller, M. (2005) "Utility Maximization in Incomplete Markets," *The Annals of Applied Probability*, 15(3), 1691–1712.

Kim, Y. and Kunitomo, N. (1999) "Pricing options under stochastic interest rates," *Asia-Pacific Financial Markets*, 6, 49–70.

Kunitomo, N. and Takahashi, A. (1992) "Pricing average options," *Jpn. Financial Rev.*, 14, 1–20.

Kunitomo, N. and Takahashi, A. (2001) " " The Asymptotic Expansion Approach to the Valuation of Interest Rate Contingent Claims," *Mathematical Finance*, 11, 117–151.

Kunitomo, N. and Takahashi, A. (2003) " " On validity of the asymptotic expansion approach in contingent claim analysis," *The Annals of Applied Probability*, 13.

Li, C. (2014) " " Closed-form Expansion, Conditional Expectation, and Option Valuation," *Mathematics of Operations Research*, 39(2).

Merton, R. C., (1969) " " Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case," *Review of Economics and Statistics*, 51, 247–257.

Merton, R. C., (1971) " " Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model," *Journal of Economic Theory*, 3, 373–413.

Nishiba, M. (2013) " " Pricing Exotic Options and American Options: A Multidimensional Asymptotic Expansion Approach," *Asia-Pacific Financial Markets*, 20(2), 147–182.

Ocone, D. and Karatzas, I., (1991) " " A generalized clark representation formula, with application to optimal portfolios," *Stochastics and Stochastics Reports*, 34, 187–220.

Osajima, Y. (2006) " " The Asymptotic Expansion Formula of Implied Volatility for Dynamic SABR Model and FX Hybrid Model," *Preprint, Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo*.

Shiraya, K. and Takahashi, A. (2013) " " Pricing Basket Options under Local Stochastic Volatility with Jumps," *CARF-F*, 336.

Shiraya, K. and Takahashi, A. (2014) " " Pricing Multi-Asset Cross Currency Options," *Journal of Futures Markets*, 34(1), 1–19.

Shiraya, K., Takahashi, A. and Toda, M. (2011) " " Pricing Barrier and Average Options under Stochastic Volatility Environment," *Journal of Computational Finance*, 15(2), 111–148.

Shiraya, K., Takahashi, A. and Yamazaki, A. (2011) " " Pricing Swaptions under the LIBOR Market Model of Interest Rates with Local-Stochastic Volatility Models," *Wilmott*, 2011(54), 61–73.

Shiraya, K., Takahashi, A. and Yamada, T. (2012) " " Pricing Discrete Barrier Options under Stochastic Volatility," *Asia Pacific Financial Markets*, 19(3), 205–232.

Takahashi, A. (1999)“ “An asymptotic expansion approach to Pricing contingent claims,” *Asia-Pacific Financial Markets*, 6, 115–151.

Takahashi, A. and Takehara, K. (2007)“ “An Asymptotic Expansion Approach to Currency Options with a Market Model of Interest Rates under Stochastic Volatility Processes of Spot Exchange Rates,” *Asia-Pacific Financial Markets*, 14, 69–121.

Takahashi, A. and Takehara, K. (2008a)“ “Fourier Transform Method with an Asymptotic Expansion Approach: an Applications to Currency Options,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 11(4), 381–401.

Takahashi, A. and Takehara, K. (2008b)“ “A Hybrid Asymptotic Expansion Scheme: an Application to Currency Options,” *CARF-F*, 116.

Takahashi, A. and Takehara, K. (2010a)“ “A Hybrid Asymptotic Expansion Scheme: an Application to Long-term Currency Options,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 13(8), 1179–1221.

Takahashi, A. and Takehara, K. (2010b)“ “Asymptotic Expansion Approaches in Finance: Applications to Currency Options,” *Finance and Banking Developments*, 185–232.

Takahashi, A. and Yoshida, N. (2004) “An Asymptotic Expansion Scheme for Optimal Investment Problems,” *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 7, 153–188.

Takahashi, A. and Yamada, T. (2012) “An Asymptotic Expansion with Push-Down of Malliavin Weights,” *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 3, 95–136.

Takahashi, A. and Yamada, T. (2011) “A Remark on Approximation of the Solutions to Partial Differential Equations in Finance,” *Recent Advances in Financial Engineering*, 3, 95–136.

- Takahashi, A. and Yamada, T. (2016) "An Asymptotic Expansion for Forward-Backward SDEs: A Malliavin Calculus Approach," *Asia-Pacific Finan Markets*, 23, 337–373.
- Takahashi, A., Tsuchida, Y. and Yamada, T. (2021) "A new efficient approximation scheme for solving high-dimensional semilinear PDEs: control variate method for Deep BSDE solver," *arXiv*.