

# 倒産と回収率の依存関係を考慮した債務担保証券の価格 評価

丸の内 QF セミナー

畠山 直人

東京都立大学大学院 経営学研究科  
農林中央金庫 \*

2024 年 3 月 9 日

\*発表内容は、報告者の個人的見解であり、その所属する組織の公式見解を示すものではない。

- 長引く国内低金利環境に直面する本邦金融機関は、利鞘確保のため、海外貸出や海外クレジット投資を積極化してきた（日本銀行金融機構局・金融庁監督局（2020））。
- 特に2019年前半にかけて、CLO（Collateralized Loan Obligation）を中心に残高が大きく伸びている。
- 海外クレジット投融資にかかる金融機関における適切なリスク管理と、その金融安定面への影響が注目されるようになっている。
- 裏付け資産の価格を含む市場データの入手の難しさなどから、近年の注目度の高まりに対して、その市場価格を実証的に分析した学術研究は少ない。
- 本研究では、企業の倒産と回収率に依存関係があるモデルを定式化し、情報ベンダーから購入したCLOの市場価格のデータを用いて実証的な分析を行った。

- CDO (Collateralized Debt Obligation) の価格付けにおいては、倒産の依存関係を考慮するために Li (2000) や Laurent and Gregory (2005) で提案されたファクター・コピュラモデルが広く用いられてきた。
- 確定的な回収率の下でのガウシアン・コピュラモデルでは、2008-2009年の金融危機時の市場価格を十分に表現できなかったことが知られている。
- Krekel (2010) はガウシアン・コピュラモデルのもとで倒産を判定し、これと同じ確率変数を用いた閾値型の回収率の分布を持つモデルの導入を提案。確定的な回収率のモデルに対して危機時の市場価格の表現力が向上することを示した。
- 回収率の分布として使われることが多いベータ分布は、モンテカルロ・シミュレーションに使うには計算負荷が高い。Höcht and Zagst (2010), Otani and Imai (2013) は Kumaraswamy 分布を用いた確率的な回収率をモデルを提案。
- Frye (2000) は Moody's のデータを用いた実証分析により、景気後退期の回収率が平時の回収率よりも大幅に低いことを示した (wrong-way-risk の存在を示唆)。

- 企業の倒産と回収率を規定する確率変数の同時分布を考え、これらの間に依存関係があるモデルを一般的に定式化し、シンプルなモデルを提案.
- 信用リスクのある債券のポートフォリオに適用し、企業間の倒産の相関を考慮したモデルの下で損失額、トランチ価格の算出式を導出.
- 提案モデルで、スプレッド拡大時のトランチド・インデックス（CDOのインデックス）およびCLOの市場価格の説明力が向上することを示す.
- キャリブレートしたモデルから示唆されるCLOの市場価格に折り込まれた回収率の分布を示す.

# モデル

# 倒産と回収率のモデル：定義

- 企業  $j$  の倒産時刻を  $\tau_j$  とする.
- 狭義単調増加な分布関数  $F_j^D$  を持つ確率変数  $X_j^D$  を

$$X_j^D := \left(F_j^D\right)^{-1} \left(F_j^\tau(\tau_j)\right) \quad (1)$$

と定義する. ここで  $(F_j^D)^{-1}$  は,  $F_j^D$  の逆関数である. 時点  $t$  までの累積倒産確率  $p_j(t) = F_j^\tau(\tau_j)$  とし,

$$c_{j,t} := \left(F_j^D\right)^{-1} (p_j(t)) \quad (2)$$

と定義する.

- 企業  $j$  の時点  $t$  までの倒産は

$$\{\tau_j \leq t\} = \{X_j^D \leq c_{j,t}\} \quad (3)$$

として捉えられる.

- 債権  $j$  からの回収率を確率変数  $R_j (> 0)$  で表す.

# 倒産と回収率のモデル：回収率 $R_j$ の条件付分布関数

- 本研究においては、企業が倒産している条件の下での回収率の条件付き分布を考えることが重要である。
- 時点  $t$  までに倒産している条件の下での回収率の期待値  $\bar{R}_j := \mathbb{E}[R_j \mid X_j^D \leq c_{j,t}]$  とすると、額面 1 の信用リスクのある割引債の期待損失額は、

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ (1 - R_j) \mathbb{1}_{\{X_j^D \leq c_{j,t}\}} \right] &= \mathbb{E} \left[ 1 - R_j \mid X_j^D \leq c_{j,t} \right] \Pr \left( X_j^D \leq c_{j,t} \right) \\ &= (1 - \bar{R}_j) p_j(t)\end{aligned}$$

であり、 $\bar{R}_j$  を用いると期待損失額が  $p_j(t)$  と  $1 - \bar{R}_j$  の積の形で書ける。

⇒ 現在の市場標準である回収率を定数とするモデルによる期待損失額と同じ形であり、既存の手法をそのまま適用可能。

## 倒産と回収率のモデル：回収率 $R_j$ の条件付分布関数

- 回収率  $R_j$  の  $\{X_j^D \leq c_{j,t}\}$  の下での条件付き分布関数を  $G_j$ , その逆関数を  $G_j^{-1}$  とする.
- $\{X_j^D \leq c_{j,t}\}$  の条件下で一様分布  $U(0, 1)$  に従う確率変数  $U_j^{R|D}$  を用いて,

$$R_j := G_j^{-1} \left( U_j^{R|D} \right) \quad (4)$$

とする.

- 無条件で一様分布  $U(0, 1)$  に従う確率変数  $U_j^R$  が回収率  $R_j$  を規定するとし,  $U_j^R$  と  $X_j^D$  の同時分布を 2 変量コピュラ  $C_j$  を用いて,

$$\Pr \left( U_j^R \leq u, F_j^D \left( X_j^D \right) \leq v \right) = C_j(u, v)$$

と表現する.



# 倒産と回収率のモデル：回収率 $R_j$ の条件付分布関数

- 時点  $t$  までの倒産を条件とした時の確率変数  $U_j^R$  の条件付き分布は

$$\Pr\left(U_j^R \leq u \mid X_j^D \leq c_{j,t}\right) = \frac{\Pr\left(U_j^R \leq u, X_j^D \leq c_{j,t}\right)}{\Pr\left(X_j^D \leq c_{j,t}\right)} = \frac{C_j\left(u, F_j^D(c_{j,t})\right)}{F_j^D(c_{j,t})}$$

となる。

- 確率変数  $C_j(U_j^R, F_j^D(c_{j,t}))/F_j^D(c_{j,t})$  は  $\{X_j^D \leq c_{j,t}\}$  の条件下で一様分布  $U(0, 1)$  に従う。そこで、本研究では (4) 式にこれを用いて、回収率  $R_j$  を

$$R_j = G_j^{-1}\left(\frac{C_j\left(U_j^R, F_j^D(c_{j,t})\right)}{F_j^D(c_{j,t})}\right) = G_j^{-1}\left(\frac{C_j(U_j^R, p_j(t))}{p_j(t)}\right) \quad (5)$$

と表現する。

# 倒産と回収率のモデル：回収率 $R_j$ の条件付分布関数

- (5) 式の  $C_j$  として, 特に  $C_j(u, v) = \min(u, v)$  を考える<sup>1</sup>. この時  $U_j^R$  と  $X_j^D$  は共単調であるため,  $U_j^R = F_j^D(X_j^D)$  に注意すると,

$$R_j = G_j^{-1} \left( \frac{\min(U_j^R, p_j(t))}{p_j(t)} \right) = G_j^{-1} \left( \min \left( \frac{F_j^D(X_j^D)}{p_j(t)}, 1 \right) \right) \quad (6)$$

であり,  $\{X_j^D \leq c_{j,t}\}$  上では,

$$R_j = G_j^{-1} \left( \frac{F_j^D(X_j^D)}{p_j(t)} \right)$$

となる.

<sup>1</sup>信用力の悪化が著しい時に回収率が小さくなりやすいという実態を踏まえたモデル化である.

# 倒産と回収率のモデル：本研究における回収率の分布関数

- 回収率の条件付き分布として, Höcht and Zagst (2010) に従い, Kumaraswamy 分布を用いる<sup>2</sup>.
- (6) 式に  $G_j^{-1} = F_{\text{Kum}}^{-1}$  として適用し,

$$R_j = \begin{cases} F_{\text{Kum}}^{-1} \left( \frac{F_j^D(X_j^D)}{p_j(t)} \right), & X_j^D \leq c_{j,t} \\ 1, & X_j^D > c_{j,t} \end{cases} \quad (7)$$

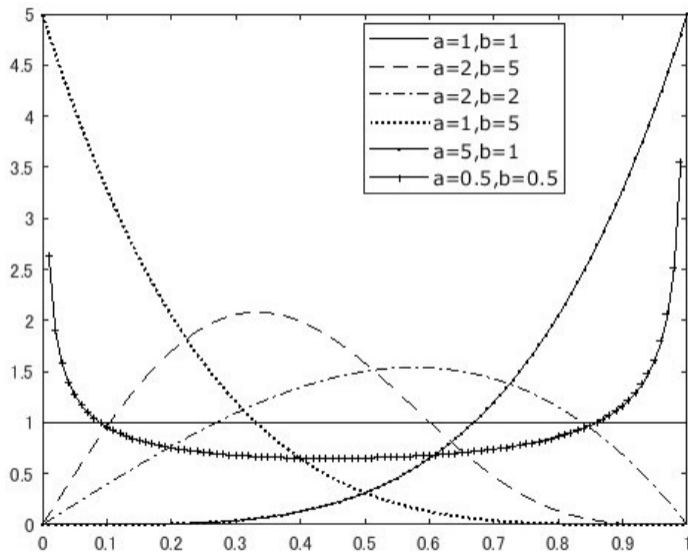
とする. ここで,  $F_{\text{Kum}}^{-1}$  は Kumaraswamy 分布の分布関数  $F_{\text{Kum}}$  の逆関数で,  $a, b > 0$  として,

$$F_{\text{Kum}}^{-1}(x) = 1 - \left(1 - x^{1/b}\right)^{1/a} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

である.

<sup>2</sup>Kumaraswamy 分布は分布関数とその逆関数が閉式解を持つため, モンテカルロ・シミュレーションに適している. 詳細は付録に記載.

# 倒産と回収率のモデル：Kumaraswamy 分布の密度関数の形状



# 倒産と回収率のモデル：ポートフォリオの損失額

- 各債権の倒産については、市場で広く使われている1ファクター・ガウシアンコピュラモデルを用いて表現する。  $V, \varepsilon_j$  を標準正規分布に従う独立な確率変数として、

$$X_j^D = \sqrt{\rho}V + \sqrt{1 - \rho}\varepsilon_j \quad (0 \leq \rho \leq 1) \quad (8)$$

により、(1)~(3)式に従い時刻  $t$  での債権  $j$  の倒産を判定する。

- 債権  $j$  を元本  $N_j$  だけ保有するポートフォリオの  $t$  時点までの累積損失額は、

$$\begin{aligned} L(t) &= \sum_{j=1}^J N_j (1 - R_j) \mathbb{1}_{\{X_j^D \leq c_{j,t}\}} \\ &= \sum_{j=1}^J N_j \left\{ 1 - G_j^{-1} \left( \frac{\Phi(X_j^D)}{p_j(t)} \right) \right\} \mathbb{1}_{\{X_j^D \leq c_{j,t}\}} \end{aligned} \quad (9)$$

と書ける。

# 倒産と回収率のモデル：倒産と回収率の依存関係

- 債権  $j$  は  $\sqrt{\rho}V + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_j \leq c_{j,t}$  の時に倒産.
- 倒産した債権  $j$  からの回収率は,

$$R_j = G_j^{-1} \left( \frac{\Phi(\sqrt{\rho}V + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_j)}{p_j(t)} \right)$$

である.

- $V$  が小さい場合には  $X_j^D$  が小さくなるため、債権  $j$  の条件付き倒産確率は高まり、かつ回収率  $R_j$  は小さくなりやすい。  
⇒ 景気後退期には倒産が増え、回収率も低くなることに相当し、経済的な直観と整合的.

# 倒産と回収率のモデル：倒産と回収率の依存関係

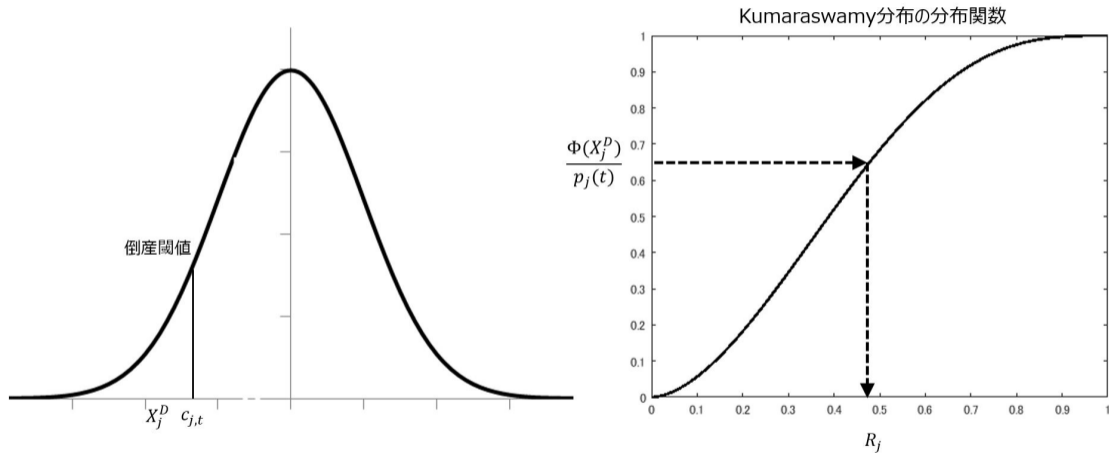


図 1: 倒産の判定と回収率の生成

# CDOの価格評価モデル

- 将来の金利は確定的として取り扱う。
- CDOの満期を  $T > 0$ , 利払い時点を  $t_i, i = 1, 2, \dots, I$ ,  $t$  時点のディスカウントファクターを  $DF(t)$  とする。
- $t_i$  時点におけるアタッチメントポイント  $A$ , デタッチメントポイント  $D$  のトランチの損失率  $L_{A,D}(t_i)$  は,

$$L_{A,D}(t_i) = \frac{\min(\max(L(t_i) - A, 0), (D - A))}{D - A} \quad (10)$$

- 発行時スプレッドを  $s_{A,D}$ ,  $[t_{i-1}, t_i]$  に適用する無リスク金利を  $r_i$  とし,  $t_i$  時点の利息は毀損していない元本相当から発生すると仮定すると<sup>3</sup>, トランチ価格は

$$P_{A,D} = \sum_{i=1}^I DF(t_i) (1 - \mathbb{E}[L_{A,D}(t_i)]) (r_i + s_{A,D}) (t_i - t_{i-1}) + DF(T) (1 - \mathbb{E}[L_{A,D}(T)]) \quad (11)$$

と書ける。

<sup>3</sup>倒産が起こるとスーパーシニアの償還が発生するなどのウォーターフォール構造は扱っていない。



# シミュレーションによるトランチ価格の計算

シミュレーションを用いた CDO のトランチ価格の算出手順は、以下の通りである。シミュレーションのパスを  $m \in \{1, 2, \dots, M\}$  とする。

- ① (a)~(d) に従い、パス  $m$  におけるトランチの損失額を計算する。
  - (a) (8) 式に従い、乱数  $X_j^D, j = 1, 2, \dots, J$  を発生する<sup>4</sup>。
  - (b) キャッシュフローが発生する時点  $t_i$  毎に (2) 式より  $c_{j,t_i}$  を計算し、(3) 式に従って債権  $j$  の生存・倒産を判定する。
  - (c) (7) 式に従い、回収率  $R_j$  を計算する。
  - (d) (9), (10) 式に従い、 $t_i$  時点でのトランチの損失率  $L_{A,D}(t_i)$  を計算する。
- ② ステップ 1 を  $M$  回繰り返すことで、 $M$  個のシナリオを生成する。
- ③ (11) 式に従い、CDO のトランチの現在価値を計算する。

ステップ 1(c) を除けば、市場標準モデルである確定回収率の下での 1 ファクター・ガウシアンコピュラモデルによる CDO の価格計算と同様。

<sup>4</sup> $X_j^D$  の発生はパス  $m$  上でこの 1 回のみで、(b)~(d) ではどの時点でも同じ  $X_j^D$  を使用する。

# モデルのキャリブレーションの事例 (トランチド・インデックス)

# トランチド・インデックスによるモデルの有効性確認

- 市場安定時（2020/1/3）、スプレッド拡大時（2020/3/20）の市場価格から、McGinty et al. (2004) のベース・コリレーションを求めることでモデルの有効性を確認する。



図 2: CDX.NA.IG.33 のスプレッド推移

# トランチド・インデックスによるモデルの有効性確認

- 回収率の分布として、パラメータを選択した Kumaraswamy 分布を適用することで<sup>5</sup>、全トランチのベース・コリレーションを統合的に求めることができた。

表 1: インプライド・ベース・コリレーション (2020/1/3)

トランチ	確定回収率	確率回収率		
		$(a = 1.75, b = 3.27)$	$(a = 1, b = 1.5)$	$(a = 0.1, b = 0.34)$
0-3	0.42	0.39	0.37	0.35
3-7	0.53	0.48	0.47	0.44
7-15	0.72	0.65	0.63	0.60

表 2: インプライド・ベース・コリレーション (2020/3/20)

トランチ	確定回収率	確率回収率		
		$(a = 1.75, b = 3.27)$	$(a = 1, b = 1.5)$	$(a = 0.1, b = 0.34)$
0-3	0.68	0.61	0.58	0.52
3-7	0.89	0.77	0.73	0.66
7-15	(1.00)	(1.00)	0.96	0.87

<sup>5</sup>無数のパラメータがあるため、回収率の分布の決め方に検討の余地がある。選択した分布の密度関数は付録参照。

# モデルのキャリブレーションの事例 (CLO)

# CLOデータを用いた分析：分析対象としたCLO

- 評価基準日は2022/4/2.
- Elevation CLO Ltd 14-2A (CUSIP : 8622QAB7) の各トランチの情報は表のとおり.
- 各トランチの市場価格はRefinitiv社のDataScope Selectから取得.
- ローンの市場価格等, 裏付け資産の情報はBloombergから取得.

表 3: 取得した Elevation CLO Ltd 14-2A のトランチ情報

クラス	格付	額面 (千ドル)	割合 (累積)	市場価格
A1R	AAA	306,992	100%	100.03
A2R	NR	15,000	35%	99.29
BR	NR	45,000	32%	98.77
CR	NR	27,000	22%	98.53
DR	NR	30,000	17%	96.26
ER	NR	23,000	10%	95.45
FR	NR	9,000	5%	94.16
Principle	—	15,913	3%	—

# CLOデータを用いた分析

- ① 確定的な回収率モデル, 6パターンの分布を選択した確率回収率モデルのもとで<sup>6</sup>, 相関  $\rho_c$  の変化が価格に与える影響を分析 (感応度分析)<sup>7</sup>.
- ② 感応度分析の結果に基づき回収率の分布を決め, 相関  $\rho_c$  はトランチごとに異なるものとして, CLO の各トランチの市場価格へモデルをキャリブレーション.

---

<sup>6</sup>期待回収率を 70%したとき, (10) 式の  $a, b$  のいずれかを定めることで分布を決めることができる.

<sup>7</sup>ここではコンパウンド・コリレーションを用いた.

# CLO データを用いた分析：回収率の分布

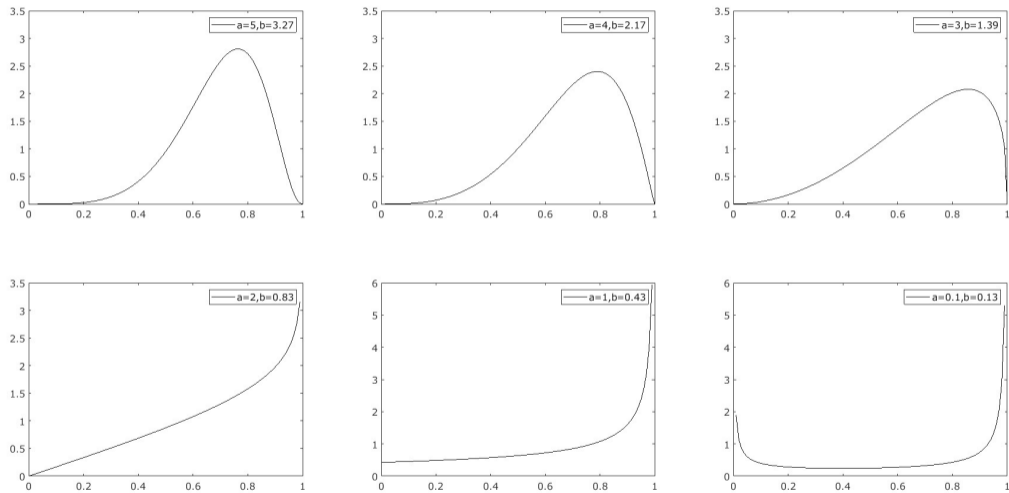


図 3: CLO のトランチのキャリブレーション時に選択した回収率の分布の確率密度



# CLOデータを用いた分析：感応度分析

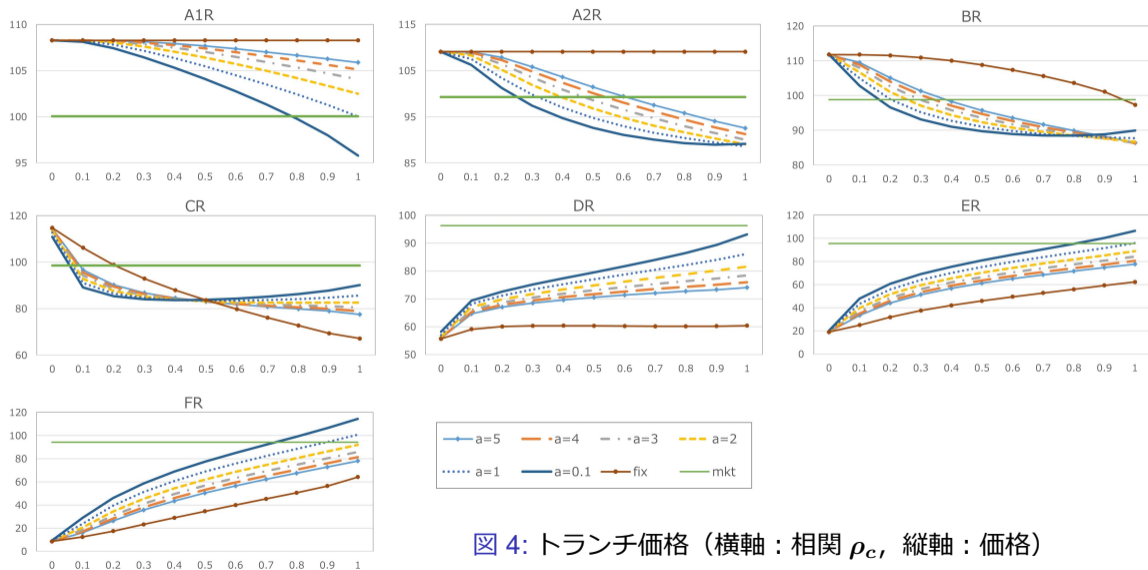


図 4: トランチ価格 (横軸：相関  $\rho_c$ , 縦軸：価格)

# CLOデータを用いた分析：感応度分析

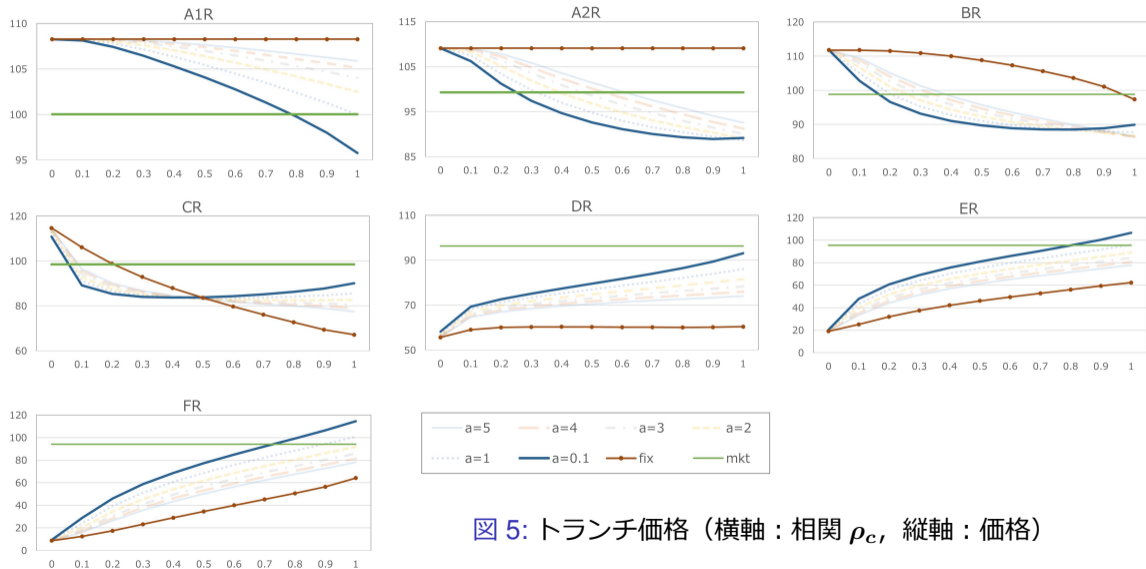


図 5: トランチ価格 (横軸：相関  $\rho_c$ , 縦軸：価格)

# CLOデータを用いた分析：キャリブレーション結果

- 確率回収率モデルを導入することで、市場価格の説明力は大幅に向上。

表 4: コンパウンド・コリレーション/モデル価格と市場価格の差異

クラス	市場価格	確定回収率モデル			確率回収率モデル		
		$\rho_c$	理論価格	差異 (%)	$\rho_c$	理論価格	差異 (%)
A1R	100.03	(1.00)	108.28	8.24	0.79	100.03	0.00
A2R	99.29	(1.00)	109.08	9.86	0.25	99.29	0.00
BR	98.77	0.97	98.77	0.00	0.16	98.77	0.00
CR	98.53	0.20	98.53	0.00	0.03	98.53	0.00
DR	96.26	(1.00)	60.34	-37.3	(1.00)	92.91	-3.33
ER	95.45	(1.00)	62.26	-34.8	0.80	95.45	0.00
FR	94.16	(1.00)	63.80	-32.2	0.73	94.16	0.00

# CLOデータを用いた分析：キャリブレーション結果からの示唆

- 感応度分析を踏まえて設定したパラメータから，密度関数がバスタブ型の極端な回収率分布が市場に織り込まれていることを示唆.

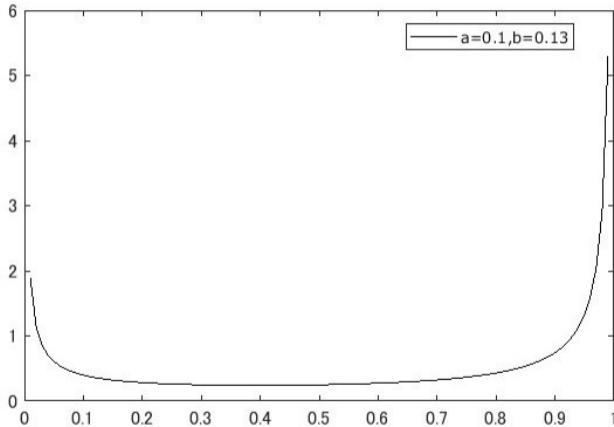


図 6: 選択した Kumaraswamy 分布の確率密度

## 【本研究の主な成果】

- 企業の倒産と回収率の間に依存関係があるモデルを一般的に定式化.
- 信用リスクのある債券のポートフォリオに適用し, 企業間の倒産の相関を考慮したモデルの下で損失額, トランチ価格の算出式を導出.
- 共通ファクターの存在から企業の同時倒産の確率が高まる場合には, 回収率が低くなるモデルとなっており, 経済的な直観と整合的.
- 構築モデルのキャリブレーション能力が市場で一般的な既存モデルに対して向上.
- CLO の市場価格のデータを用いた実証研究である.

## 【今後の課題】

- 市場価格の説明力が高いモデルの検討 (全てのトランチ価格を整合的に説明するには至っていない).
- 回収率の分布を含めたキャリブレーション方法の検討.
- CLO の優先劣後構造をより精緻に評価したモデルの検討.
- 他のコピュラの検討.

- [1] Frye, J. (2000) “Depressing recoveries,” *Risk*, Vol. 13, No. 11, pp. 108–111.
- [2] Höcht, S. and R. Zagst (2010) “Pricing distressed CDOs with stochastic recovery,” *Review of Derivatives Research*, Vol. 13, pp. 219–244.
- [3] Krekel, M. (2010) “Pricing distressed CDOs with base correlation and stochastic recovery rates,” *Risk*, Vol. 23, No. 7, p. 82.
- [4] Laurent, J.-P. and J. Gregory (2005) “Basket default swaps, CDOs and factor copulas,” *Journal of Risk*, Vol. 7, No. 4, pp. 103–122.
- [5] Li, D. X. (2000) “On default correlation: A copula function approach,” *The Journal of Fixed Income*, Vol. 9, No. 4, pp. 43–54.
- [6] McGinty, L., E. Beinstein, R. Ahluwalia, and M. Watts (2004) “Introducing base correlations,” *Credit Derivatives Strategy*, JP Morgan.
- [7] Otani, Y. and J. Imai (2013) “Pricing Portfolio Credit Derivatives with Stochastic Recovery and Systematic Factor,” *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, Vol. 43, No. 4, pp. 176–184.
- [8] 日本銀行金融機構局・金融庁監督局 (2020) 「本邦金融機関の海外クレジット投融資の動向—日本銀行と金融庁の合同調査を踏まえた整理—」, 『日銀レビュー』.

# 付録

# Kumaraswamy 分布

- Kumaraswamy 分布は,  $0 \leq x \leq 1, a, b > 0$  として, 確率密度関数は,

$$g_{\text{Kum}}(x) = abx^{a-1} (1 - x^a)^{b-1}$$

分布関数は

$$G_{\text{Kum}}(x) = 1 - (1 - x^a)^b$$

$G_{\text{Kum}}$  の逆関数は,

$$G_{\text{Kum}}^{-1}(x) = 1 - \left(1 - x^{1/b}\right)^{1/a}$$

- 期待値と分散は,  $B(x, y)$  をベータ関数として

$$\mathbb{E}[X] = bB\left(1 + \frac{1}{a}, b\right)$$

$$\mathbb{V}[X] = \sqrt{bB\left(1 + \frac{2}{a}, b\right) - b^2B\left(1 + \frac{1}{a}, b\right)^2}$$



# ベータ分布

- ベータ分布は,  $0 \leq x \leq 1, a, b > 0$  として, 確率密度関数は,

$$g_{\text{Beta}}(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)}$$

ここで,  $B(x, y)$  はベータ関数.

- 分布関数は

$$G_{\text{Beta}}(x) = \frac{\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt}{B(a, b)}$$

- 期待値と分散は,

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a}{a+b}$$

$$\mathbb{V}[X] = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

# 回収率の分布：トランチド・インデックス

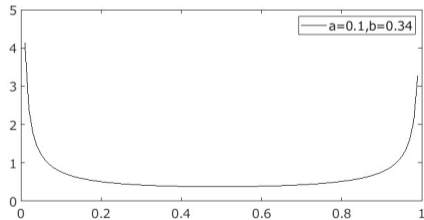
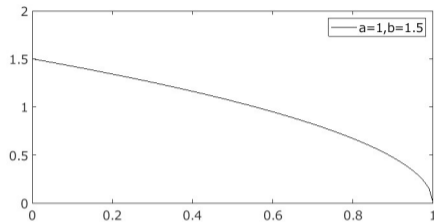
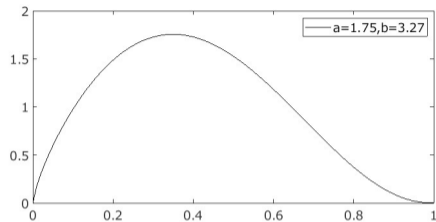


図 7: トランチド・インデックスのキャリブレーション時に選択した回収率の分布の確率密度

## 利息の再投資について（簡易的な取扱い）

- 表3の優先劣後構造のもとで上位トランチから利金の支払いを行うと、全トランチの支払い後に余りが生じる。
- 現時点では簡単のため、残ったスプレッド部分の50%を使って担保を購入できると仮定し、 $t_i$ 時点の期待損失を $\mathbb{E}[L(t_i)]$ 、期初の裏付け資産ポートフォリオ全体の加重平均スプレッドを $s_{\text{ave}}$ 、トランチ $k$ 、 $k = 1, \dots, K$ の期初残高とスプレッドを $B_k, s_k$ として

$$\left( \sum_{j=1}^J N_j - \mathbb{E}[L(t_i)] \right) \left( s_{\text{ave}} - \frac{\sum_{k=1}^K B_k s_k}{\sum_{k=1}^K B_k} \right) (t_i - t_{i-1}) \times 0.5$$

を裏付け資産ポートフォリオの元本に加算することとした。