

制約なし最適ポートフォリオの機械学習による応用

内藤 誠* 竹原 浩太†

2024年2月16日 (改訂: 2024年2月17日)

概要

本稿では、制約のない最適ポートフォリオ問題を数値的に解く方法を提案する。本手法は完備市場における最適ポートフォリオ問題で応用された漸近展開法 (Takahashi and Yoshida, 2004) と、最適ポートフォリオ問題を後退確率微分方程式に書き直す手法 (Hu et al., 2005), BSDE を機械学習を用いて解く手法 (E et al., 2017; Han et al., 2018) を組み合わせる。数値シミュレーションの結果、本手法は従来の手法と比較して効率的に最適ポートフォリオを推定できる可能性があることが示唆される。

1 はじめに

最適ポートフォリオ問題はファイナンスにおいて重要な課題の一つである。しかしながら、問題を陽に解くためにはしばしば強い仮定が必要であり、逆に仮定を緩めすぎると問題が解けない場合や解析的に求まらないことが多い。また、最適ポートフォリオ問題を考える上で投資ホライズンを1期間と捉えるのかそれとも多期間と捉えるかでは最適ポートフォリオを導出する難しさがかなり異なる。1期間モデルに対しては、任意の確率分布の下で効用関数が2次効用の場合または任意のリスク回避的効用関数で投資収益率が正規分布に従う状況では最適ポートフォリオは平均分散アプローチで解けることが知られている。一方で、多期間モデルにおいて投資収益率の確率分布が変動するような設定の下では、特別な効用関数を除いてその最適ポートフォリオ問題を解くことは難しい。Samuelson (1969) と Merton (1969) は1期間の問題を多期間に拡張するにあたり、効用関数が時間を通じて同一という仮定の下で各期の期待効用の総和を最大にするように期初に最適な消費と最適なポートフォリオを構築する方法を考えている。その下で彼らは投資家の効用関数が対数効用の場合またはベキ型効用かつ投資収益率が独立同分布に従う場合には多期間の問題が1期間の問題と一致することを示している。しかしながら、より一般的な仮定の下では、完備市場で制約のない問題であっても多期間の場合に Explicit に解くことは難しいことが知られている。

Takahashi and Yoshida (2004) では漸近展開法を用いて完備市場における制約なし最適ポートフォリオ問題の近似解を得る方法を提案している。漸近展開法 (Kunitomo and Takahashi, 2001) はマリアバン解析を理論的背景とする解析的近似解を求める手法であり、近年最適ポートフォリオ問題を含む多くのファイナンスの課題に応用されている。例えば、オプション価格に関しては Kunitomo and Takahashi (1992, 2001, 2003); Takahashi (1999); Kim and Kunitomo (1999); Li (2014); Nishiba (2013); Osajima (2006); Shiraya, Takahashi and Toda (2011); Shiraya, Takahashi and Yamazaki (2011); Shiraya, Takahashi and

* 東京都立大学大学院 経営学研究科 経営学専攻 博士課程後期

† 東京都立大学大学院 経営学研究科 経営学専攻

Yamada (2012); Shiraya and Takahashi (2013, 2014); Takahashi and Takehara (2007, 2008a,b, 2010a,b); Takahashi and Yamada (2011, 2012) があげられる。彼らは平均オプションやバスケットオプションを含む様々なオプション等に漸近展開法を応用している。Takahashi and Yoshida (2004) は完備市場における制約なし最適ポートフォリオ問題に対して、マルチンゲール法を適用し、そこに漸近展開法を用いることで近似解を解析的に求めている点が特徴的である。しかしながら、1次近似など低次の近似では誤差が大きいことも多く、最適ポートフォリオを精緻に求めるにはより高次の計算などが必要となる。

一方、最適ポートフォリオ問題を後退確率微分方程式（以下、BSDE という）で表現することで数値的に解く方法も考えることができる。Hu et al. (2005) は完備市場における最適ポートフォリオ問題に対する BSDE 表現を与えている。彼らは効用関数が指数効用やベキ型効用である最適ポートフォリオ問題を BSDE に書き換え、その解から最適ポートフォリオや価値関数の値を導出している。彼らの手法では対数効用のときのみ陽に最適ポートフォリオを導ける一方で、一般的な条件の下では何らかの数値解法を用いて BSDE を解き、最適ポートフォリオを求める必要がある。

また近年、このような研究とは独立に BSDE の解を数値的に解く方法が数多く提案され、その中には漸近展開法を用いる手法も含まれている。例えば、Takahashi and Yamada (2016) はピカールの逐次近似に漸近展開法を組み合わせることで効率的に BSDE を解く方法を提案している。その他にも BSDE への漸近展開法の応用には Fujii and Takahashi (2012, 2015, 2018a,b, 2019) などが挙げられる。

それとは別に機械学習手法を用いて BSDE を効率的に解く方法（以下、この手法を DeepSolver 法と呼ぶ）も提案されている (E et al., 2017; Han et al., 2018)。DeepSolver 法は BSDE の解を機械学習手法の一つであるニューラルネットワークモデルで表現し、多くのシミュレーションデータをモデルにインプットしトレーニングを繰り返して解く手法である。さらに、DeepSolver 法を改良することでより効率的に BSDE を解こうとする先行研究もある。Takahashi et al. (2021) は高次元の半線形偏微分方程式を効率的に解くために、漸近展開法と DeepSolver 法を組み合わせつつ対応する BSDE を解くことで、単純な DeepSolver 法と比較して計算速度や精度が改善したことを示している。具体的には BSDE 自体を 2 つに分解し、片方の BSDE に漸近展開法を適用し近似解を求め、もう一方の BSDE にその近似解を適用することでより効率的に機械学習が行えるように工夫している。Takahashi et al. (2021) は BSDE のドライバーにリプシッツ性を仮定しているが、ドライバーが本稿で扱うような 2 次成長の場合にも漸近展開法と DeepSolver 法を適用する先行研究もある (Fujii et al. (2019))。

そこで本研究では Hu et al. (2005) の方法を用いて最適ポートフォリオ問題を BSDE で表現し、その BSDE に対して漸近展開法と機械学習を適用することで最適ポートフォリオを数値的に解く方法を提案する。数値シミュレーションの結果、本手法は従来の手法と比較して効率的に最適ポートフォリオを導出できる可能性があることを示唆している。後述するように同じく BSDE に対して漸近展開法と機械学習を組み合わせる Takahashi et al. (2021) や Fujii et al. (2019) は BSDE 自体を単純なドライバーを持つものとそれ以外に分け、後者に機械学習を適用する際に前者を事前知識として与えている。一方で本手法では、ポートフォリオ最適化についてすでに知っている結果を用いて、ポートフォリオを既知の部分とそれ以外に分けた上で後者に機械学習を適用する際に前者を事前知識として与えており、同じ漸近展開法を応用する手法であっても問題の分解方法や与える事前知識の違いがある。また、本研究の目的は最適ポートフォリオ問題の価値関数だけでなく、最適ポートフォリオ自体を求めることにある。多くの DeepSolver 法を用いた研究では CVA やオプション価格、すなわち BSDE の初期値のみ焦点があたる。一方で、資産運用の実務においては極めて重要な問題の中には、最適ポートフォリオ問題のように BSDE の初期値の水準よりも得られたポートフォリオの最適性に関心があるものも多い。DeepSolver 法のように BSDE の初期値それ自体をニューラルネットワークで表

現する場合、トレーニングで推定されたポートフォリオが達成する期待効用がポートフォリオと同時に推定された初期値と一致するとは限らない。本研究ではポートフォリオの最適性に焦点をあてている点もこれまでの先行研究とは異なる。

最後に、本論文の構成について述べる。第2節は提案手法の概要を述べる。第3節では、完備市場における問題設定を行い、第4節では、完備市場における制約なし最適ポートフォリオ問題について扱う。第5節では状態変数がマルコフ型の確率微分方程式に従うという仮定の下で第4節の最適ポートフォリオを導出し、第6節では漸近展開法について述べる。第7, 8節では最適ポートフォリオ問題の BSDE 表現と DeepSolver 法について述べる。第9節は具体的な数値例を示し、最後にまとめとして第10節で結論と今後の課題について述べる。数学的な詳細については Appendix で述べる。

2 提案手法の概要

以下の期待効用最大化問題を考える。

$$V(W) = \sup_{\pi} \mathbf{E}[U(W^{\pi}(T))], \quad (1)$$

ただし、 π はポートフォリオ、 W^{π} はポートフォリオ π の下での富過程である。このとき、Hu et al. (2005) より次の BSDE の解 Y_0 と Z_t を求めることで価値関数 $V(W) = W^{\gamma}/\gamma \exp(Y(0))$ と最適ポートフォリオ $(\pi^*(t))^{\top}/W^{\pi^*}(t) = \frac{1}{1-\gamma}(Z(t) + \theta(t))\sigma^{-1}(t)$ を導くことができる (定理4 参照)。ここで、 $\theta(t), \sigma(t)$ はそれぞれ株式に対するリスクの市場価格とボラティリティを表し、詳細は3節で定義する。

$$Y(t) = 0 - \int_t^T Z(s)^{\top} dw(s) - \int_t^T f(s, Z(s)) ds, \quad t \in [t, T], \quad (2)$$

ただし、ドライバー f は

$$f(t, z) = -\frac{\gamma|z + \theta(t)|^2}{2(1-\gamma)} - \frac{1}{2}|z|^2 \quad (3)$$

で与えられる。

このとき、E et al. (2017) と Han et al. (2018) が提案した DeepSolver 法は以下の問題をニューラルネットワークを用いて解く。

$$\inf_{Y(0), Z} \mathbf{E} \left[\left| 0 - \hat{Y}(T) \right|^2 \right] \quad (4)$$

ただし、 $\hat{Y}(T)$ は (2) 式で与えられる BSDE に対応する確率微分方程式のオイラー・丸山近似である。

本研究では解 Z を Takahashi and Yoshida (2004) の漸近展開法を用いた近似 Z_{asy} と、 Z と Z_{asy} の差 ($Z_{\text{rem}} = Z - Z_{\text{asy}}$) に分解して、後者を機械学習で解く方法を提案する。すなわち、 Z に対する漸近展開法による近似 Z_{asy} を、 Z_{rem} に対する学習における事前知識として利用する。

$$Z = Z_{\text{asy}} + Z_{\text{rem}}. \quad (5)$$

具体的には漸近展開法で求めた最適ポートフォリオ $\Pi_{\text{asy}} = (\pi_{\text{asy}})^{\top}/W_{\text{asy}}$ を用いて、

$$Z_{\text{asy}}(t) := (1-\gamma) \times \Pi_{\text{asy}} \sigma(t) - \theta(t) \quad (6)$$

として定義する。 Z_{asy} の具体的な形は6節で与えられる。

ここで、関連する先行研究に言及しておく。まず、Takahashi and Yamada (2016) については前提条件としてドライバー f のリプシッツ性を要求するが、(3) 式はこれを満たさない。実際、最も単純なブラック・ショールズモデルの下で予備的に数値実験を行った際も θ の値が大きいケースでは理論値から大きく乖離する結果となった。また、Takahashi et al. (2021) は本手法と同様に BSDE をドライバーがゼロの部分とそれ以外とに分解し後者を DeepSolver 法で解く。ただし、本稿の設定下では前者が恒等的に 0 となり、単純な DeepSolver 法と同等になる。最後に、Fujii and Takahashi (2019) はドライバーに (3) 式のような 2 次成長を許与し、BSDE をドライバーが線形の部分とそれ以外に分解し後者を DeepSolver 法で解く。Fujii and Takahashi (2019) では BSDE それ自体を分解し線形部分を事前知識として利用するが、本研究ではポートフォリオを (5) 式のように分解し漸近展開法を適用した上で事前知識として用いる点が異なる。このため、本研究における数値実験においてはこれらを含めていない。

3 完備市場における問題設定

まず、完備市場における問題設定を行う。 d 個のリスク資産と 1 個のリスクフリー資産が存在する市場を考える。 d 個のリスク資産 S_i , $i = 1, \dots, d$ は以下の確率微分方程式の解として与える。

$$dS_i(t) = S_i(t) \left[b_i(t)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t)dw_j(t) \right], \quad S_i(0) = s_i > 0, \quad i = 1, \dots, d,$$

ただし、 w_j ($j = 1, \dots, d$) は互いに独立な標準ブラウン運動である。リスクフリー資産 S_0 は以下の確率過程で与える。

$$dS_0 = r(t)S_0(t)dt, \quad S_0(0) = 1.$$

ただし、 $r(t)$, $b_i(t)$, $\sigma_{ij}(t)$, $i, j = 1, \dots, d$ は有界かつ $\{\mathcal{F}_t\}$ に関して発展的可測であり、 $\sigma(t) := \{\sigma_{ij}(t)\}_{i,j}$ は正則かつ非退化条件 (nondegeneracy condition) を満たすとする。すなわち、 $\sigma(t) := \{\sigma_{ij}(t)\} \in \mathbf{R}^{d \times d}$ に対して、次を満たす定数 $\varepsilon > 0$ が存在すると仮定する。

$$\xi^\top \sigma(t, \omega)^\top \xi \geq \varepsilon |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^d, \quad (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega \text{ a.s.}$$

また、初期富 W を保有し、各時点 t で投資額 $\pi(t) = (\pi_1(t), \dots, \pi_d(t))^\top$ をリスク資産に投資する投資家について考える。ただし、今回は各時点の消費については考えないことにする。このとき、投資家の富が従う確率過程は以下のように表すことができる。

$$dW(t) = [r(t)W(t)] dt + \pi(t)^\top [(b(t) - r(t)\mathbf{1})dt + \sigma(t)dw(t)], \quad W(0) = W > 0.$$

ただし、 $w(t) := (w_1(t), \dots, w_d(t))^\top$, $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^\top \in \mathbf{R}^d$ である。また、 $\pi(t)$ が以下の可積分条件を満たすとする。

$$\int_0^T |\pi(t)|^2 dt < \infty \quad \text{a.s.}$$

このとき、投資家は以下の効用最大化を達成するように株式への投資額を決定する。

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}(W)} \mathbf{E}[U(W^\pi(T))],$$

ただし、 U は効用関数（後述）であり、 $\mathcal{A}(W)$ は初期富 W の投資家が許容可能な投資戦略 π の集合を表す。以下では完備市場における最も一般的なものとして、次のものを考える：

$$\mathcal{A}(W) := \{\pi : W^\pi(t) \geq 0, \quad \forall t > 0\}.$$

効用関数 $U : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ は以下の条件を満たす狭義の単調増加関数かつ \mathbf{C}^2 級、狭義の凸関数とする。

$$U(0+) := \lim_{c \downarrow 0} U(c) \in [-\infty, \infty),$$

$$U'(0+) := \lim_{c \downarrow 0} U'(c) = \infty,$$

$$U'(\infty) := \lim_{c \rightarrow \infty} U'(c) = 0.$$

例 1 ベキ型効用関数

$$U(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

例 2 対数型効用関数

$$U(x) = \log(x).$$

また、簡単のためにいくつかの記号を導入する。

$$\theta(t) := \sigma(t)^{-1}[b(t) - r(t)\mathbf{1}].$$

と定義するとき、これをリスクの市場価格と呼ぶ。さらに、 $Z(t)$ を

$$Z(t) := \exp\left(-\int_0^t \theta(s)^\top dw(s) - \frac{1}{2} \int_0^t |\theta(s)|^2 ds\right), \quad 0 \leq t \leq T$$

とおき、同値マルチンゲール測度を

$$\mathbf{P}_0(A) := \mathbf{E}[1_A Z(T)], \quad \forall A \in \mathcal{F}_T$$

で定義すると、同値マルチンゲール測度 \mathbf{P}_0 の下で、 $w_0(t) := w(t) + \int_0^t \theta(u) du$, $0 \leq t \leq T$ は標準ブラウン運動であることに注意する。

4 最適ポートフォリオ（マルチンゲール法）

本節では、完備市場における制約なし最適ポートフォリオ問題（効用最大化問題）を考える際に、良く知られた事実を紹介する（証明の詳細は Karatzas and Shreve(1998), Theorem 7.6).

価値関数 V を

$$V(W) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}(W)} \mathbf{E}[U(W^\pi(T))] \tag{7}$$

と定義すると、期末における最適富 $W^{\pi^*}(T)$ ($\pi^* = \arg \max_{\pi \in \mathcal{A}(W)} \mathbf{E}[U(W^\pi(T))]$) は

$$W^{\pi^*}(T) = I(\mathcal{Y}(W)H_0(T))$$

で表すことができ、価値関数 V は

$$V(W) = G(\mathcal{Y}(W))$$

と表すことができる。ただし、 $I \in C^1(0, \infty)$ は U' の逆関数であり、 \mathcal{Y} は次の関数 \mathcal{X} の逆関数である。

$$\mathcal{X}(y) = \mathbf{E}_0[\beta(T)I(yH_0(T))] = \mathbf{E}[H_0(T)I(yH_0(T))], \quad 0 < y < \infty.$$

また,

$$G(y) := \mathbf{E}[U(I(yH_0(T)))], \quad 0 \leq y \leq \infty$$

である。ただし、 $\beta(t) := 1/S_0(t)$, $H_0(t) := \beta(t)Z(t)$ は時刻 t における状態価格密度、 $\mathbf{E}_0[\cdot]$ は \mathbf{P}_0 の下での期待値作用素である。

このとき、最適ポートフォリオは Ocone and Karatzas (1991) より以下のように表現することができる。

定理 1 (Ocone and Karatzas, 1991)

ある定数 α, β, K について

$$I(y) + |I'(y)| \leq K(y^\alpha + y^{-\beta}), \quad 0 < y < \infty$$

が成り立つと仮定する。このとき、最適ポートフォリオは以下で表せる。

$$\begin{aligned} (\pi^*(t))^\top \sigma(t) = & -\frac{1}{\beta(t)} \{ \theta^\top(t) \mathbf{E}_0[\beta(T) \mathcal{Y}(W) H_0(T) I'(\mathcal{Y}(W) H_0(T)) | \mathcal{F}_t] \} \\ & + \mathbf{E}_0 \left[\beta(T) \phi'(\mathcal{Y}(W) H_0(T)) \left(\int_t^T D_t r(u) du + \sum_{\alpha=1}^d \int_t^T \{ D_t \theta_\alpha(u) \} dw_0^\alpha(u) \right) | \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

ただし、 $\phi(y) := yI(y)$, $0 < y < \infty$ であり、 $D_t r(u)$, $D_t \theta_\alpha(u)$, $\alpha = 1, 2, \dots, d$ はそれぞれ $r(u)$, $\theta_\alpha(u)$ のマリアバン微分である。

また、 r と θ は次の条件を満たすとする:

1. \mathbf{R} 値発展的の可測な確率過程 r は有界; $r(s, \cdot) \in \mathcal{D}_{1,1}$ $s \in [0, T]$ a.s. ただし、 $\mathcal{D}_{1,1}$ は $(s, \omega) \mapsto Dr(s, \omega) \in (L^2([0, T]))^d$ が発展的の可測な修正を持ち、

$$\|r\|_{1,1}^a := \mathbf{E} \left[\left(\int_0^T |r(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^T \|Dr(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] < \infty$$

をセミノルムとするソボレフ空間である。ただし、 $\|\cdot\|$ は $L^2([0, T])$ ノルムであり、 $\|Dr(s)\|^2 := \sum_{i=1}^d \|D^i r(s)\|^2$ である。ただし、 D^i は w_i に関するマリアバン微分である。

2. \mathbf{R}^d 値発展的の可測な確率過程 θ は有界; $\theta(s, \cdot) \in (\mathcal{D}_{1,1})^d$, $s \in [0, T]$ a.s. である。
3. ある $p > 1$ に対して

$$\mathbf{E} \left[\left(\int_0^T \|Dr(s)\|^2 ds \right)^{\frac{p}{2}} \right] < \infty, \quad \mathbf{E} \left[\left(\int_0^T \|D\theta(s)\|^2 ds \right)^{\frac{p}{2}} \right] < \infty.$$

ただし、 $\|D\theta(s)\|^2 := \sum_{i,j=1}^d \|D^i \theta_j(s)\|^2$ である。

このとき、実確率測度 \mathbf{P} について上記の定理を書き直すことができる。

定理 2 (Takahashi and Yoshida, 2004)

定理 1 と同じ条件の下で, 最適ポートフォリオは確率測度 \mathbf{P} の下で次の表現を持つ:

$$(\pi^*(t))^\top \sigma(t) = W^{\pi^*}(t) \theta^\top(t) - \mathbf{E} \left[\frac{H_0(T)}{H_0(t)} \phi'(\mathcal{Y}(W)H_0(T)) | \mathcal{F}_t \right] \theta^\top(t) \\ - \mathbf{E} \left[\frac{H_0(T)}{H_0(t)} \phi'(\mathcal{Y}(W)H_0(T)) \times \left(\int_t^T D_t r(u) du + \sum_{\alpha=1}^d \left\{ \int_t^T \{D_t \theta_\alpha(u)\} dw^\alpha(u) + \int_t^T \{D_t \theta_\alpha(u) du\} \right\} \right) | \mathcal{F}_t \right]$$

ただし, $W^{\pi^*}(t)$ は時刻 t の最適富であり, 以下で表せる:

$$W^{\pi^*}(t) = \mathbf{E} \left[\frac{H_0(T)}{H_0(t)} I(\mathcal{Y}(W)H_0(T)) | \mathcal{F}_t \right].$$

注意 1 最適ポートフォリオにおいて, 右辺第一項は 1 期間の最適ポートフォリオを表しており, "平均分散ポートフォリオ" と呼ばれる. また, 右辺第二項以降は多期間特有の項で, Merton (1971) では"ヘッジ需要" と呼ばれる将来の不確実性に対するヘッジの需要を表す. $D_t r(u), D_t \theta_\alpha(u)$ はそれぞれ将来の金利変化とリスクの市場価格の変化を表現している.

最適ポートフォリオ $\pi(t)$ は特別な場合に簡単に導くことができる.

例 3 1. 対数効用の場合: $U(x) = \log(x)$

このとき, $\phi \equiv 1$ より最適ポートフォリオ $\pi^*(t)$ は

$$\pi^*(t) = \theta^\top(t) \sigma^{-1}(t) W^{\pi^*}(t)$$

となる. つまり, 対数効用の場合, 最適ポートフォリオウェイト $\pi^*(t)/W^{\pi^*}(t)$ は超過収益率ベクトルに共分散行列の逆行列を掛けたものである.

2. ベキ効用かつ投資機会が一定の場合

このとき, $D_t r(u) \equiv 0, D_t \theta_\alpha(u) \equiv 0$ より最適ポートフォリオ $\pi^*(t)$ は

$$\pi^*(t) = \theta^\top(t) \sigma^{-1}(t) W^{\pi^*}(t)$$

となり, 対数効用の場合と同じ結果となる.

このようなポートフォリオは, 1 期間の最適ポートフォリオと同一であるため近視眼的ポートフォリオと呼ばれる.

5 Markovian Setting

本節では, 次節で漸近展開法を適用するための準備として, Takahashi and Yoshida (2004) に基づいて数学的準備を行う. 具体的には状態変数がマルコフ型の確率微分方程式に従うことを仮定する.

すべての確率変数は $[t, T]$ 上の Wiener 空間で定義されるものとし, 状態変数 X_t^ε を以下の確率微分方程式に従う d 次元の確率過程とする.

$$dX_u^\varepsilon = v_0(X_u^\varepsilon, \varepsilon) du + v(X_u^\varepsilon, \varepsilon) dw_u, \quad X_t^\varepsilon = x.$$

また、今後の計算を簡単にするために、以下の確率微分方程式で定義される $d \times d$ 行列値確率過程 $y_t^\varepsilon = \{y_{t,u}^\varepsilon : u \in [t, T]\}$ に対する以下の確率微分方程式が一意的な解を持つとする。

$$dy_{t,u}^\varepsilon = \sum_{\alpha=0}^d \partial_x v_\alpha(X_u^\varepsilon, \varepsilon) y_{t,u}^\varepsilon dw_u^\alpha, \quad y_{t,t}^\varepsilon = I.$$

ただし、 $u \in [t, T]$ で、 $\varepsilon \in (0, 1]$ は漸近展開に用いられるパラメータであり、

$$\begin{aligned} v_0 &\in C_b^\infty(\mathbf{R}^d \times (0, 1]; \mathbf{R}^d), \\ v &= (v_\beta)_{\beta=1}^d \in C_b^\infty(\mathbf{R}^d \times (0, 1]; \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^d) \end{aligned}$$

とする*1。また、 I は $d \times d$ の単位行列である。

以下の議論では、 $r \in C_b^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}_+)$ 、 $\theta \in C_b^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^d)$ と仮定し、 r, θ, σ は全て状態変数 X_u^ε により次のように決定されるとする。

$$r(u) = r(X_u^\varepsilon), \quad \theta(u) = \theta(X_u^\varepsilon), \quad \sigma(u) = \sigma(X_u^\varepsilon).$$

上記の設定の下で定理 2 の系を導くことができる。

系 1 (Takahashi and Yoshida, 2004)

上記の設定の下で、最適ポートフォリオは以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} (\pi^*(t))^\top \sigma(x) &= \left\{ W^{\pi^*}(t) - \mathbf{E}[H_{0,t,T} \phi'(\mathcal{Y}H_{0,t,T})] \right\} \theta^\top(x) \\ &\quad - \mathbf{E} \left[H_{0,t,T} \phi'(\mathcal{Y}H_{0,t,T}) \left(\int_t^T \partial r(X_u^\varepsilon) y_{t,u}^\varepsilon v(x, \varepsilon) du + \sum_{\alpha=1}^d \int_t^T \partial \theta_\alpha(X_u^\varepsilon) y_{t,u}^\varepsilon v(x, \varepsilon) dw^\alpha(u) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\alpha=1}^d \int_t^T \theta_\alpha(X_u^\varepsilon) \partial \theta_\alpha(X_u^\varepsilon) y_{t,u}^\varepsilon v(x, \varepsilon) du \right) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 $H_{0,t,T}$ は以下で与えられる：

$$\begin{aligned} H_{0,t,T} &:= \frac{H_0(T)}{H_0(t)} \\ &= \exp \left(- \int_t^T \theta_\alpha(X_u^\varepsilon)^\top dw(u) - \frac{1}{2} \int_t^T |\theta(X_u^\varepsilon)|^2 du - \int_t^T r(X_u^\varepsilon) du \right). \end{aligned}$$

\mathcal{Y} は次の式で決まる：

$$W^{\pi^*}(t) = \mathbf{E}[H_{0,t,T} I(\mathcal{Y}H_{0,t,T})].$$

以降では、効用関数をベキ型と仮定して議論する。

$$U(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}, \quad x \in (0, \infty), \quad \gamma \in (0, 1).$$

このとき、

$$I(x) = x^{-1/(1-\gamma)}, \quad \phi(x) = x^{-\gamma/(1-\gamma)}, \quad \phi'(x) = [-\gamma/(1-\gamma)] I(x)$$

と計算できる。これらを用いて最適ポートフォリオ (8) は以下のように書き直すことができる。

*1 $C_b^\infty(\mathbf{R}^d \times (0, 1]; E)$: 滑らかな関数 $f: \mathbf{R}^d \times (0, 1] \rightarrow E$ の偏微分係数 $\partial_x^n \partial_\varepsilon^m f(x, \varepsilon)$ がすべて有界であるものの集合

系 2 (Takahashi and Yoshida, 2004)

ベキ型効用の仮定の下で,

$$\begin{aligned}
(\pi^*(t))^\top \sigma(x) &= \frac{1}{1-\gamma} W^{\pi^*}(t) \theta(x)^\top + \frac{\gamma}{1-\gamma} (\mathcal{Y})^{-1/(1-\gamma)} \mathbf{E} \left[(H_{0,t,T})^{-\gamma/(1-\gamma)} \times \right. \\
&\quad \left(\int_t^T \partial r(X_u^\varepsilon) y_{t,u}^\varepsilon v(x, \varepsilon) du + \right. \\
&\quad \sum_{\alpha=1}^d \int_t^T \partial \theta_\alpha(X_u^\varepsilon) y_{t,u}^\varepsilon v(x, \varepsilon) dw^\alpha(u) + \\
&\quad \left. \left. + \sum_{\alpha=1}^d \int_t^T \theta_\alpha(X_u^\varepsilon) \partial \theta_\alpha(X_u^\varepsilon) y_{t,u}^\varepsilon v(x, \varepsilon) du \right) \right],
\end{aligned}$$

ただし, \mathcal{Y} は以下の解である.

$$W^{\pi^*}(t) = (\mathcal{Y})^{-1/(1-\gamma)} \mathbf{E} \left[(H_{0,t,T})^{-\gamma/(1-\gamma)} \right].$$

また, 最適ポートフォリオウェイト π^*/W^{π^*} について整理すると次のようになる.

$$\begin{aligned}
(\pi^*(t))^\top / W^{\pi^*}(t) &= \frac{1}{1-\gamma} \theta(x)^\top \sigma^{-1}(x) + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{1}{\mathbf{E} \left[(H_{0,t,T})^{-\gamma/(1-\gamma)} \right]} \mathbf{E} \left[(H_{0,t,T})^{-\gamma/(1-\gamma)} \times \right. \\
&\quad \left(\int_t^T \partial r(X_u^\varepsilon) y_{t,u}^\varepsilon v(x, \varepsilon) du + \right. \\
&\quad \sum_{\alpha=1}^d \int_t^T \partial \theta_\alpha(X_u^\varepsilon) y_{t,u}^\varepsilon v(x, \varepsilon) dw^\alpha(u) + \\
&\quad \left. \left. + \sum_{\alpha=1}^d \int_t^T \theta_\alpha(X_u^\varepsilon) \partial \theta_\alpha(X_u^\varepsilon) y_{t,u}^\varepsilon v(x, \varepsilon) du \right) \right] \sigma^{-1}(x). \tag{9}
\end{aligned}$$

以降では, 最適ポートフォリオウェイト (9) を漸近展開法で展開する.

6 漸近展開法

本節では, 前節での仮定の下で Takahashi and Yoshida (2004) に基づいて状態変数とそれに関する関数の漸近展開を行う.

まず, X_u^ε と $y_{t,u}^\varepsilon$ の漸近展開を導く.

仮定 1

$$v(\cdot, 0) \equiv 0.$$

仮定 1 より $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限過程 $(X_u^0)_{u \in [t, T]}$ は次の常微分方程式の一意的な解となる.

$$X_u^0 = x + \int_t^u v_0(X_s^0, 0) ds.$$

ここで, $\sigma(X_u^0)$ は $\forall u \in [t, T]$ に対して非退化と仮定する. さらに, 極限過程 $y_{t,s} := y_{t,s}^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_{t,s}^\varepsilon$ は以下の常微分方程式の解となる:

$$\begin{aligned}
dy_{t,s} &= \partial_x v_0(X_s^0, 0) y_{t,s} ds, \quad s \in [t, T] \\
y_{t,t} &= I.
\end{aligned} \tag{10}$$

このとき、以下で定義される確率過程

$$D(t; u) := \frac{\partial X_u^\varepsilon}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}, \quad E(t; u) := \frac{\partial^2 X_u^\varepsilon}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0}, \quad y_{t,u}^{[1]} := \frac{\partial y_{t,u}^\varepsilon}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \quad (11)$$

はそれぞれ以下の確率微分方程式に従う。

$$\begin{cases} dD(t; u) = \partial_x v_0(X_u^0, 0) D(t; u) du + \sum_{\alpha=0}^d \partial_\varepsilon v_\alpha(X_u^0, 0) dw^\alpha \\ D(t; t) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} dE(t; u) = \partial_x v_0(X_u^0, 0) E(t; u) du + \partial_x^2 v_0(X_u^0, 0) [D(t; u)] du \\ \quad + 2 \sum_{\alpha=0}^d \partial_x \partial_\varepsilon v_\alpha(X_u^0, 0) D(t; u) dw^\alpha \\ \quad + \sum_{\alpha=0}^d \partial_\varepsilon^2 v_\alpha(X_u^0, 0) dw^\alpha, \\ E(t; t) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} dy_{t,s}^{[1]} = \partial_x v_0(X_s^0, 0) y_{t,s}^{[1]} ds + \partial_x^2 v_0(X_s^0, 0) [D(t; s)] y_{t,s} ds \\ \quad + \sum_{\alpha=0}^d \partial_\varepsilon \partial_x v_\alpha(X_s^0, 0) y_{t,s} dw_s^\alpha, \\ y_{t,t}^{[1]} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

ただし、 $D^{(i)}(t, s)$ は $D(t; s)$ の要素 i 、 $(y_{t,s})^{(i, \cdot)}$ は $y_{t,s}$ の第 i 列であり、

$$\begin{aligned} \partial_x^2 v_0(X_u^0) [D(t; u), D(t; u)] &:= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \partial_{x^i} \partial_{x^j} v_0(X_u^0, 0) D^{(i)}(t; u) D^{(j)}(t; u) \\ \partial_x^2 v_0(X_s^0) [D(t; s)] y_{t,s} ds &:= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \partial_{x^i} \partial_{x^j} v_0(X_s^0, 0) D^{(j)}(t; s) (y_{t,s})^{(i, \cdot)} \end{aligned}$$

である。

計算が煩雑になることを防ぐために、記号を定義する。

$$\begin{aligned} X_u &= X_u^0, \quad y_u = y_u^0, \\ v_{\alpha u} &= v_{\alpha u}^{[0]} = v_\alpha(X_u, 0), \quad \alpha = 0, 1, \dots, r \\ \partial &= \partial_x = (\partial_1, \dots, \partial_d)^\top, \quad \partial_i = \partial_{x^i} \end{aligned}$$

このとき、 X_u^ε と $y_{t,u}^\varepsilon$ は次の漸近展開を持つ。

補題 1 X_u^ε と $y_{t,u}^\varepsilon$ の漸近展開は以下のように導ける。

$$\begin{aligned} X_u^\varepsilon &= X_u + \varepsilon D(t; u) + \frac{\varepsilon^2}{2} E(t; u) + o(\varepsilon^2), \\ y_{t,u}^\varepsilon &= y_{t,u} + \varepsilon y_{t,u}^{[1]} + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

ただし,

$$\left\{ \begin{array}{l} D(t; u) = y_{t,u} \int_t^u y_{t,s}^{-1} \sum_{\alpha=0}^d \partial_\varepsilon v_{\alpha s} dw_s^\alpha, \\ E(t; u) = y_{t,u} \int_t^u y_{t,s}^{-1} \{ \partial^2 v_{0s} \} [D(t; s), D(t; s)] ds + 2 \sum_{\alpha=0}^d \partial \partial_\varepsilon v_{\alpha s} D(t; s) dw_s^\alpha + \sum_{\alpha=0}^d \partial_\varepsilon^2 v_{\alpha s} dw_s^\alpha, \\ y_{t,u}^{[1]} = y^{t,u} \int_t^u (y_{t,s})^{-1} \left[\partial^2 v_{0s} [D(t; s)] y_{t,s} ds + \sum_{\alpha=0}^d \partial_\varepsilon \partial v_{\alpha s} y_{t,s} dw_s^\alpha \right]. \end{array} \right.$$

以降で用いる細かな漸近展開の結果については Appendix A 節にまわすことにする. このとき, 以下の定理が成り立つ.

定理 3 仮定 1 と仮定 2 の下で, ベキ効用の最適ポートフォリオウエイトの ε オーダーまでの漸近展開は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} (\pi^*(t))^\top / W^{\pi^*}(t) &= \frac{1}{1-\gamma} \theta^\top(x) \sigma^{-1}(x) + \frac{\gamma}{1-\gamma} \varepsilon \left(\int_t^T \partial r^{[0]}(u) y_{t,u} du + \frac{1}{1-\gamma} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{\alpha=1}^d \int_t^T \theta_\alpha^{[0]}(u) \partial \theta_\alpha^{[0]}(u) y_{t,u} du \right) \partial_\varepsilon v(x, 0) \sigma^{-1}(x) + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (15)$$

このとき, 2 節の $\pi_{\text{asy}}, Z_{\text{asy}}$ は以下のように具体的に表現することができる.

$$\begin{aligned} (\pi_{\text{asy}}(t))^\top / W^{\pi_{\text{asy}}}(t) &= \frac{1}{1-\gamma} \theta^\top(x) \sigma^{-1}(x) + \frac{\gamma}{1-\gamma} \varepsilon \left(\int_t^T \partial r^{[0]}(u) y_{t,u} du + \frac{1}{1-\gamma} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{\alpha=1}^d \int_t^T \theta_\alpha^{[0]}(u) \partial \theta_\alpha^{[0]}(u) y_{t,u} du \right) \partial_\varepsilon v(x, 0) \sigma^{-1}(x), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Z_{\text{asy}}(t) &= (1-\gamma) \times \left(\frac{1}{1-\gamma} \theta^\top(x) \sigma^{-1}(x) + \frac{\gamma}{1-\gamma} \varepsilon \left(\int_t^T \partial r^{[0]}(u) y_{t,u} du + \frac{1}{1-\gamma} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \sum_{\alpha=1}^d \int_t^T \theta_\alpha^{[0]}(u) \partial \theta_\alpha^{[0]}(u) y_{t,u} du \right) \partial_\varepsilon v(x, 0) \sigma^{-1}(x) \right) \sigma(x) - \theta(x). \end{aligned} \quad (17)$$

7 最適ポートフォリオ問題の BSDE 表現

以降では簡単のために, 金利 $r \equiv 0$ と仮定する. これまでの仮定の下で Hu et al. (2005) より以下の定理が導かれる.

定理 4 価値関数は以下で与えられる:

$$V(x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma \exp(Y_0), \quad x > 0, \quad (18)$$

ただし, Y_0 は以下の BSDE の解 $(Y, Z) \in \mathcal{H}^\infty(\mathbf{R}) \times \mathcal{H}^2(\mathbf{R}^m)$ で与えられる:

$$Y_t = 0 - \int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T f(s, Z_s) ds, \quad t \in [t, T], \quad (19)$$

ただし,

$$f(t, z) = -\frac{\gamma|z + \theta_t|^2}{2(1-\gamma)} - \frac{1}{2}|z|^2. \quad (20)$$

このとき, 最適ポートフォリオは以下で与えられる:

$$(\pi_t^*)^\top / W_t^{\pi^*} = \frac{1}{1-\gamma} (Z_t + \theta_t) \sigma_t^{-1}. \quad (21)$$

8 提案手法の整理

以下では, 本提案手法の有効性を確認するために以下の4つ手法を数値例をもとに比較検証する.

1. 直接法:

以下の効用最大化問題を直接解く.

$$V(x) = \sup_{\pi} \mathbf{E}[U(\hat{W}_T^\pi)], \quad (22)$$

ただし, \hat{W}_T^π は以下の確率微分方程式のオイラー・丸山近似である.

$$W(t) = W(0) + \int_0^t \pi(s)^\top [b(s)ds + \sigma(s)dw(s)], \quad W(0) = W > 0.$$

2. DeepSolver 法:

以下の問題を機械学習を用いて解く.

$$\inf_{Y_0, Z} \mathbf{E} \left[\left| 0 - \hat{Y}_T \right|^2 \right] \quad (23)$$

ただし, \hat{Y}_T は以下の BSDE に対応する確率微分方程式のオイラー・丸山近似であり,

$$Y_t = 0 - \int_t^T Z_s dw_s - \int_t^T f(s, Z_s) ds, \quad t \in [t, T], \quad (24)$$

ただし, $f(t, z)$ は (20) で与えられる.

3. 漸近展開法 + DeepSolver 法:

上記の DeepSolver 法に加えて, Z を漸近展開法による近似 Z_{asy} と残りの部分 $Z_{\text{rem}} (= Z - Z_{\text{asy}})$ に分け Z_{asy} は漸近展開法の結果を代入し Z_{rem} のみ学習する.

$$\inf_{Y_0, Z_{\text{rem}}} \mathbf{E} \left[\left| 0 - \hat{Y}_T \right|^2 \right] \quad (25)$$

ただし, \hat{Y}_T は以下の BSDE に対応する確率微分方程式のオイラー・丸山近似である.

$$Y_t = 0 - \int_t^T (Z_{\text{asy},s} + Z_{\text{rem},s}) dw_s - \int_t^T f(s, Z_{\text{asy},s} + Z_{\text{rem},s}) ds, \quad t \in [t, T]. \quad (26)$$

4. MV + DeepSolver 法:

漸近展開法 + DeepSolver 法において, Z の漸近展開法による近似 Z_{asy} のうち, 平均分散 (以下, MV と示す) の項である

$$Z_{\text{MV}} := (1-\gamma) \times \frac{1}{1-\gamma} \theta(x)^\top \sigma^{-1}(x) \times \sigma(x) - \theta(x) \quad (27)$$

と残りの部分 Z_{rem} に分け Z_{MV} は (27) を代入し Z_{rem} のみ学習する.

$$\inf_{Y_0, Z_{\text{rem}}} \mathbf{E} \left[\left| 0 - \hat{Y}_T \right|^2 \right] \quad (28)$$

ただし, \hat{Y}_T は以下の BSDE に対応する確率微分方程式のオイラー・丸山近似である.

$$Y_t = 0 - \int_t^T (Z_{\text{MV},s} + Z_{\text{rem},s}) dw_s - \int_t^T f(s, Z_{\text{MV},s} + Z_{\text{rem},s}) ds, \quad t \in [t, T]. \quad (29)$$

つまり, Z_{MV} は Z_{asy} のゼロ次部分に相当する.

9 数値例

$$d\theta_t = k_2(\bar{\theta} - \theta_t)dt + \varepsilon\sigma_2 dw_t, \quad (30)$$

ただし, w_t は 1 次元標準ブラウン運動である. また前述の通り金利 r は 0 とし, $d = 1$ とする. このとき, 1 つのリスク資産は以下で表される:

$$dS_t = S_t(\sigma\theta_t dt + \sigma dw_t), \quad (31)$$

ただし, 初期条件は $S_0 = s$ し, w_t は (30) 式と同一とする. リスク資産への資産配分を π とすると, 資産は以下のように決まる:

$$W_t^\pi = W + \int_0^t \frac{W_u^\pi \pi_u}{S_u} dS_u = x + \int_0^t \pi_u \sigma_u (dW_u). \quad (32)$$

投資家の効用関数は引き続き以下のベキ効用とする.

$$U(x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma, \quad x \geq 0, \quad \gamma \in (0, 1). \quad (33)$$

各パラメータの値は Detemple et al. (2003); Takahashi and Yoshida (2004) を参考に $\theta_0 = 0.1, \sigma = 0.2, T = 1, w_0 = 1, \varepsilon = 0.03637, k_1 = 0.0824, k_2 = 0.6950, \bar{\theta} = 0.0871$ とする. γ と σ_2 の値に関しては以下 4 つの異なる数値例を扱う.

1. $\gamma = 0.5, \sigma_2 = 0.21/0.03637 \times 2$
2. $\gamma = 0.5, \sigma_2 = 0.21/0.03637 \times 1$
3. $\gamma = 0.2, \sigma_2 = 0.21/0.03637 \times 2$
4. $\gamma = 0.2, \sigma_2 = 0.21/0.03637 \times 1$

以降では, 「機械学習」と言った場合, ニューラルネットワークを用いることを意味するとする. 本研究で用いるすべてのニューラルネットワークはインプットを $t, \gamma, \theta_t, \sigma$ の 4 つの変数として隠れ層の数は 3 層でそれぞれセル数は $4 \cdot 3 \cdot 2$ である. 学習率は 10^{-3} とおく. また, バッチノーマライゼーションを各層に適用し最適化は Adam を使用する.

なお, 機械学習によって得られた (Y, Z) の推定値 (\hat{Y}, \hat{Z}) , あるいはそこから求められる $(\hat{V}_0, \hat{\pi})$ について, $\hat{\pi}$ により達成される価値関数の値 $V_0^{\hat{\pi}} = \mathbf{E} [U(W_T^{\hat{\pi}})]$ と, \hat{V}_0 は必ずしも一致しないことに注意する. このた

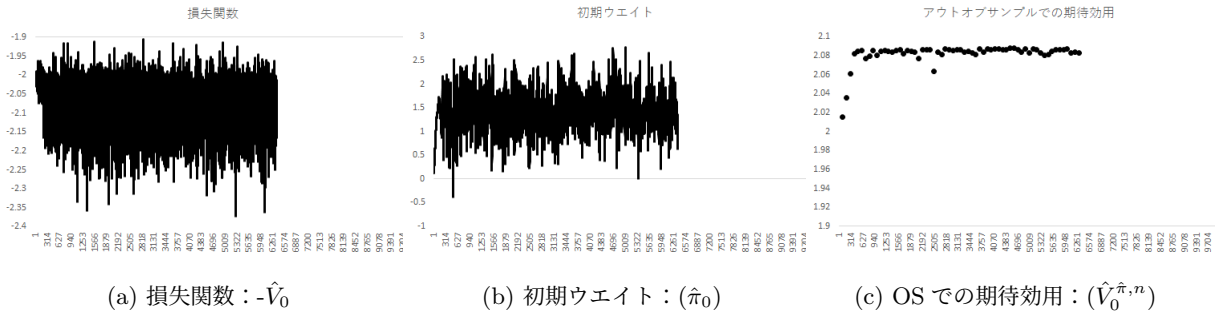
め、ポートフォリオ自身に興味がある場合、 \hat{V}_0 や損失関数の大小は適切な規準となり得ない可能性がある。そこで、本研究ではポートフォリオ $\hat{\pi}$ に対して、アウトオブサンプル（以下、OS）での価値関数の推定値

$$V^{\hat{\pi},n} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U(\hat{W}_T^{\hat{\pi},i}) \approx \mathbf{E}[U(W_T^{\hat{\pi}})], \quad (34)$$

を評価の規準として加えた。ただし、 n はアウトオブサンプル（トレーニングで使用していない）のサンプルパスの数、 $\hat{W}_T^{\hat{\pi},i}$ は富過程のオイラー・丸山近似の i 番目のパスにおける実現値である。またオイラー・丸山近似の離散幅を Δt と記載し以下の数値実験では $\Delta t = 1/50$ とする。

9.1 直接法

まず、例 1： $\gamma = 0.5, \sigma_2 = 0.21/0.03637 \times 2$ の場合における期待効用最大化問題を直接法で解いた場合の結果を示す。



例 1 を直接法で解いた場合の損失関数・初期ウエイト・アウトオブサンプルでの期待効用を示す。横軸はトレーニング回数で縦軸がそれぞれ損失関数・初期ウエイト・アウトオブサンプルでの期待効用の値である。

図 1: 直接法

図 1 は損失関数 ($-\hat{V}_0$)、アウトオブサンプルでの期待効用 ($\hat{V}_0^{\hat{\pi},n}$)、初期ウエイト ($\hat{\pi}_0$) を図示したものである。まず、損失関数の値が 6,400 回以降の値が消えていることを指摘しておく。勾配消失や勾配爆発の結果、それ以降の計算ができなかったためである*2。また、損失関数の値や初期ウエイトの変動幅が大きく問題の解が収束しているかどうかの判断ができない。つまり、今回のような設定下で期待効用最大化問題を直接法で解こうとすると難しいことが分かる。

9.2 4つのモデル比較

次に本提案手法を含めた 4 つのモデルの比較の結果を示す。

9.2.1 例 1： $\gamma = 0.5, \sigma_2 = 0.21/0.03637 \times 2$

損失関数の結果を図 2 に示す。まず、DeepSolver 法と本提案手法、MV+DeepSolver 法ともに 1 万回のトレーニングまで完了していることが確認できる。本提案手法は DeepSolver 法や MV + DeepSolver 法と比較して収束スピードが速く最初の 100 回前後の学習で収束している。また損失関数の変動幅も相対的に小さく

*2 この現象は他のランダムシードやパラメータを変更した際にも同様の結果となる。

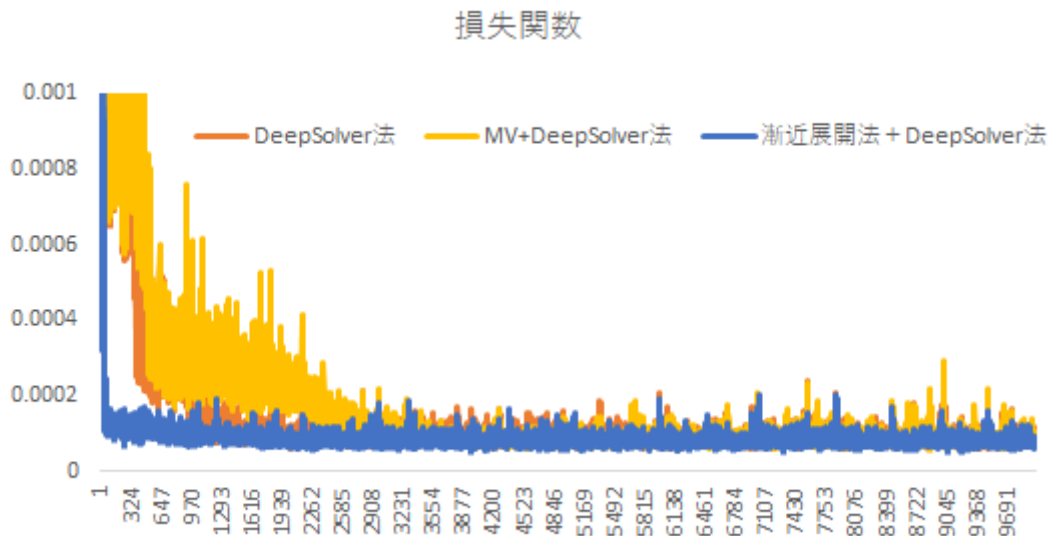


図 2: 損失関数

例 1 を DeepSolver 法・MV+DeepSolver 法・漸近展開法 +DeepSolver 法で解いた場合の損失関数を示す。横軸はトレーニング回数で縦軸が損失関数の値である。

安定していることが分かる。ただし、直接法の損失関数は期待効用に -1 をかけたものであり、他の 3 つの手法の損失関数とは異なるため比較対象とせず図 2 にも掲載していない。これは他の例でも同様である。

図 3 に初期ポートフォリオウェイトを示す。まず、直接法の初期ウェイトは他のモデルと比較して変動幅が高く上手く収束していないことが確認できる。一方で、DeepSolver 法や本提案手法は変動幅は相対的に小さく 1.45 近辺に解があるように見て取れる。また、MV+DeepSolver 法は DeepSolver 法や本提案手法と比較して収束が遅いことが分かる。

図 4 はアウトオブサンプルにおける期待効用の結果である。まず、直接法で解いた場合よりも DeepSolver 法で解いた方が期待効用が高いことが確認できる。さらに、DeepSolver 法と本提案手法の期待効用を比較すると最初の数回のトレーニング時点で本提案手法の方が安定的に期待効用が高いことが分かる。さらに、トレーニング回数が増加しても一部を除きほとんどのケースで本提案手法の期待効用が高い。一見、初期ウェイトの結果を見ると DeepSolver 法と差がないように見えるが、アウトオブサンプルで比較すると本提案手法の方が良い結果を示していることがわかる。また、MV+DeepSolver 法との比較においても同様で本提案手法の方が期待効用が高いことが分かる。最後に、DeepSolver 法と MV+DeepSolver 法を比較すると、トレーニング回数が少ない場合には前者の方が値が大きく、トレーニング回数が増加するにつれ関係が逆転している。

9.2.2 例 2: $\gamma = 0.5, \sigma_2 = 0.21/0.03637 \times 1$

損失関数の結果を図 5 に示す。例 1 と同様に本提案手法は DeepSolver 法や MV+DeepSolver 法と比較して収束スピードが速いことが確認できる。また損失関数の変動幅も相対的に小さく安定していることが分かる。また、例 1 と比較すると 3 手法いずれについても損失関数の値が小さくなっていることもわかる。これは θ のボラティリティが低いことに起因すると考えられる。

図 6 に初期ポートフォリオウェイトを示す。例 1 と同様に直接法の初期ウェイトは収束しておらず変動幅

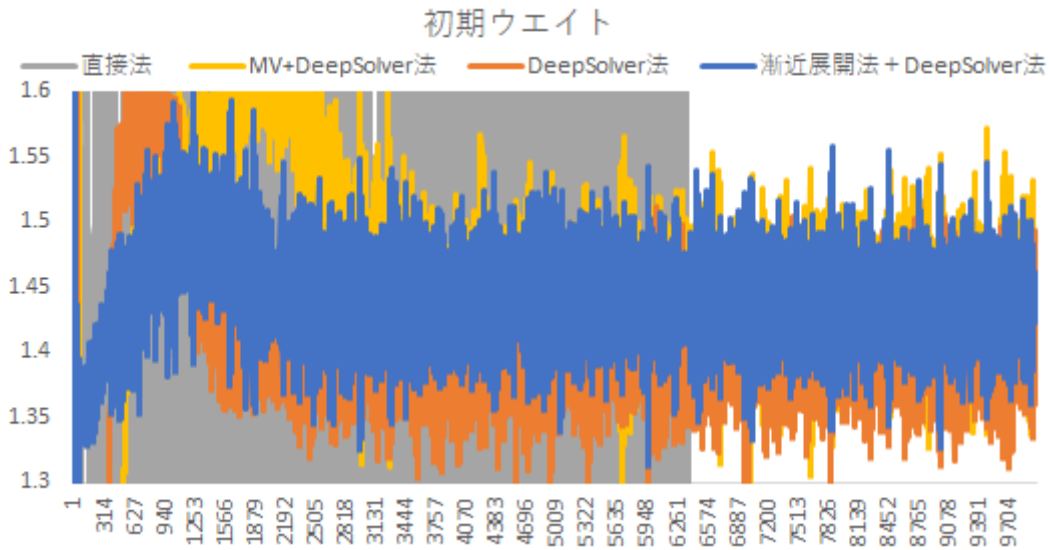


図 3: 初期ウエイト

例 1 を DeepSolver 法・MV+DeepSolver 法・漸近展開法 +DeepSolver 法で解いた場合の初期ウエイトを示す。横軸はトレーニング回数で縦軸が初期ウエイトの値である。

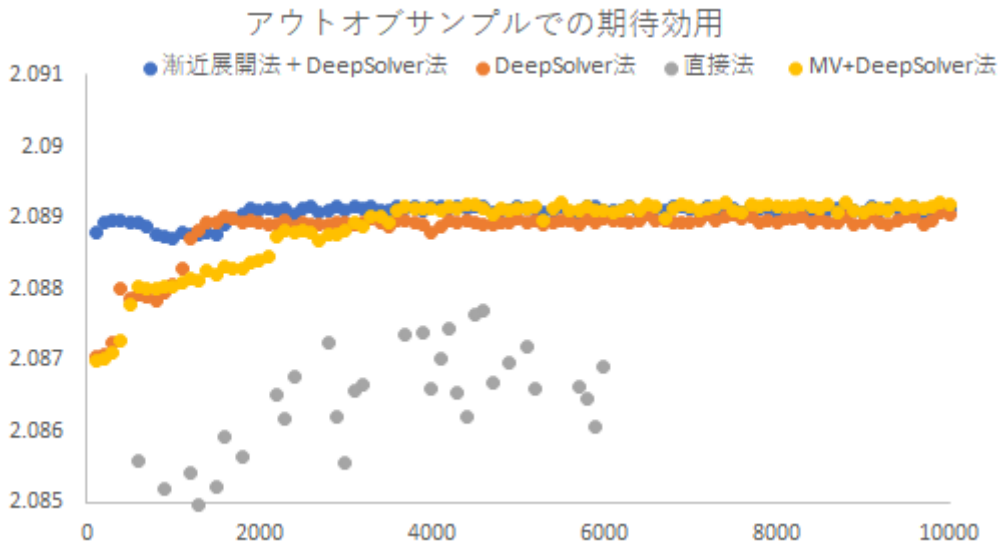


図 4: アウトオブサンプルでの期待効用

例 1 を DeepSolver 法・MV+DeepSolver 法・漸近展開法 +DeepSolver 法で解いた場合のアウトオブサンプルでの期待効用を示す。横軸はトレーニング回数で縦軸がアウトオブサンプルでの期待効用の値である。

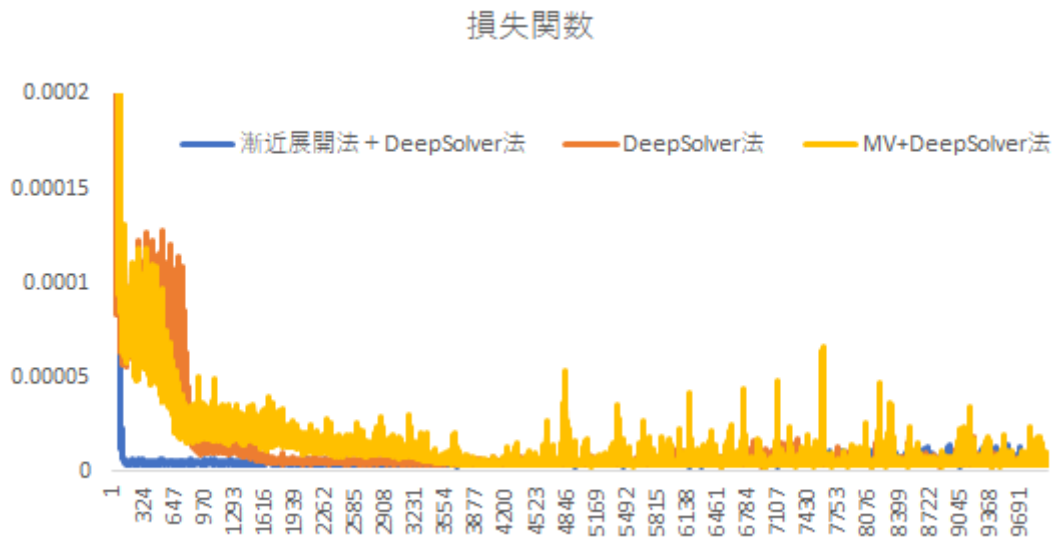


図 5: 損失関数

例 2 を DeepSolver 法・MV+DeepSolver 法・漸近展開法 +DeepSolver 法で解いた場合の損失関数を示す。横軸はトレーニング回数で縦軸が損失関数の値である。

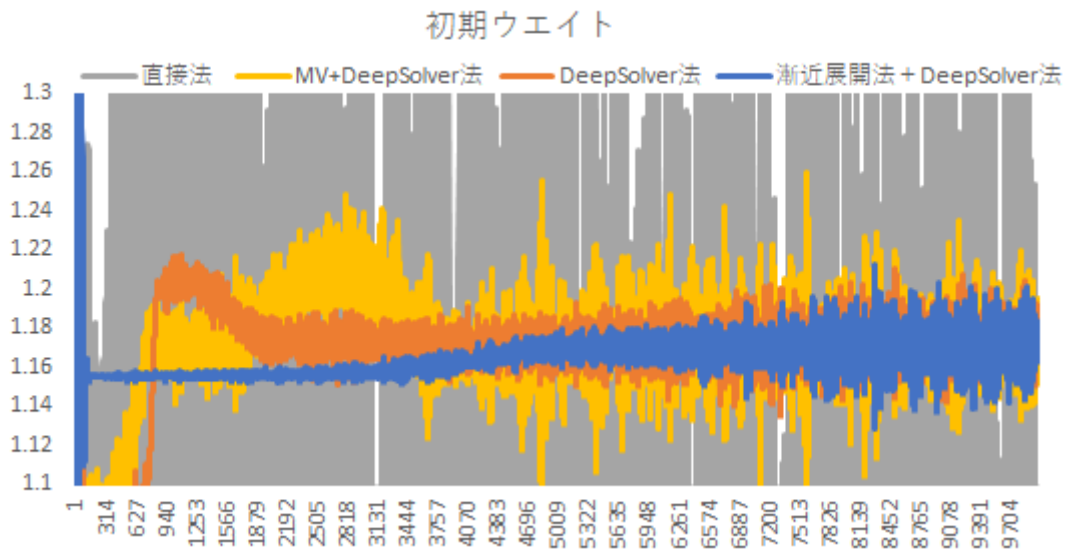


図 6: 初期ウエイト

例 2 を DeepSolver 法・MV+DeepSolver 法・漸近展開法 +DeepSolver 法で解いた場合の初期ウエイトを示す。横軸はトレーニング回数で縦軸が初期ウエイトの値である。

も高い一方で、本提案手法は比較的早い学習ステップにおいて収束しているように見える。また、本提案手法は DeepSolver 法や MV+DeepSolver 法と比較しても収束スピードが速い。ただし、トレーニング回数が 8000 回程度に達すると、変動幅が DeepSolver 法と同水準まで拡大している。こうした現象は Takahashi et al. (2021) などでも見られる。最後に、例 1 と比較すると損失関数同様、全体の収束が速いことにも注意しておく。

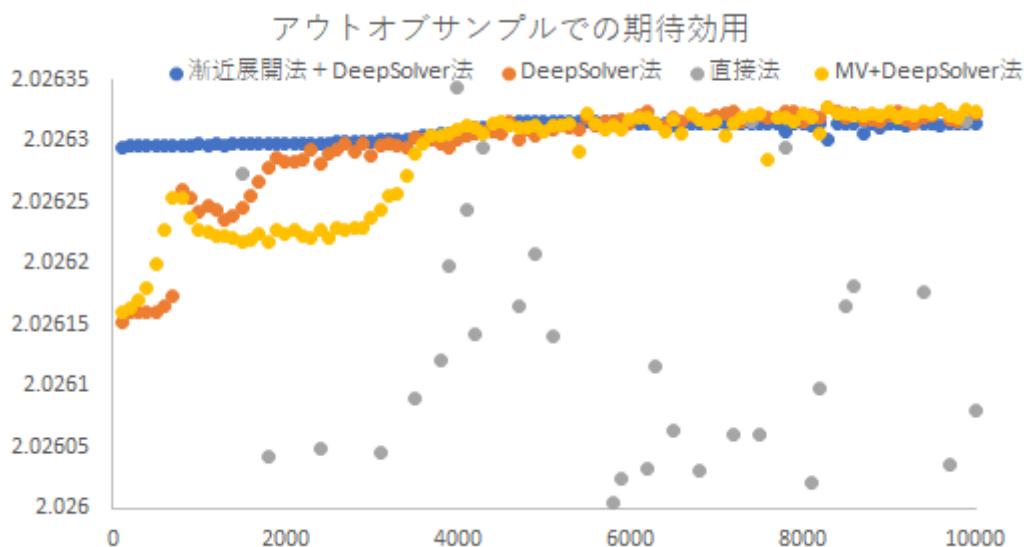


図 7: アウトオブサンプルでの期待効用

例 2 を DeepSolver 法・MV+DeepSolver 法・漸近展開法 +DeepSolver 法で解いた場合のアウトオブサンプルでの期待効用を示す。横軸はトレーニング回数で縦軸がアウトオブサンプルでの期待効用の値である。

図 7 はアウトオブサンプルにおける期待効用の結果である。トレーニング回数が少ない場合では本提案手法は他の手法に比べて大きく優れたパフォーマンスを示す。一方で、トレーニング回数が 4000 を超えるとそれほど大きなパフォーマンスの違いは見られない。また、DeepSolver 法と MV+DeepSolver 法との比較については概ね例 1 と同様である。

9.2.3 例 3: $\gamma = 0.2, \sigma_2 = 0.21/0.03637 \times 2$

$\gamma \rightarrow 0$ とすると系 2 から分かるように最適ポートフォリオは平均分散ポートフォリオに近づき、手法 3 は手法 4 に収束する。そこで以下では γ を 0.2 に設定し、MV 以外の影響が低い状況においても本提案手法が有効か検証する。すなわち、この例では $\gamma = 0.5$ のとき比較して MV+DeepSolver 法と本提案手法の事前知識 Z_{MV}, Z_{asy} に差が生じにくい。このようなケースにも本提案手法が相対的に優れたパフォーマンスを示すか否かを確認する。

損失関数の結果を図 8 に示す。本提案手法の値は 500 回程度で大きく低下し他の手法と比べても最も速い。一方で、MV+DeepSolver 法の収束スピードも DeepSolver 法と比較すると速く、変動幅は最も低いことが確認できる。本提案手法においては 5000 回以上の学習ステップでは損失関数の変動幅が DeepSolver 法と同程度まで大きくなっていることがわかる。

図 9 に初期ポートフォリオウエイトを示す。初期ウエイトにおいても本提案手法が最も速く 0.67 程度に安

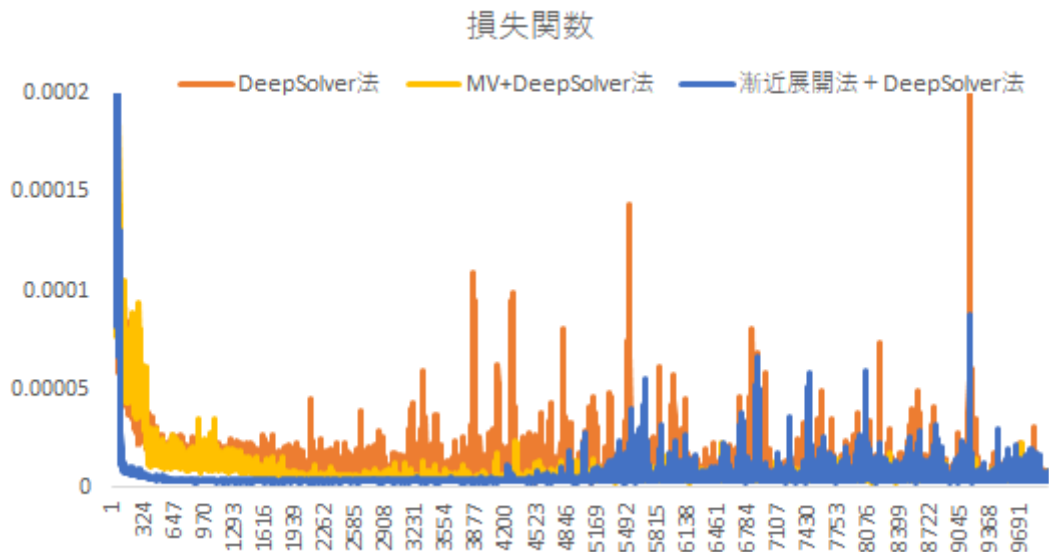


図 8: 損失関数

例 3 を DeepSolver 法・MV+DeepSolver 法・漸近展開法 +DeepSolver 法で解いた場合の損失関数を示す。横軸はトレーニング回数で縦軸が損失関数の値である。

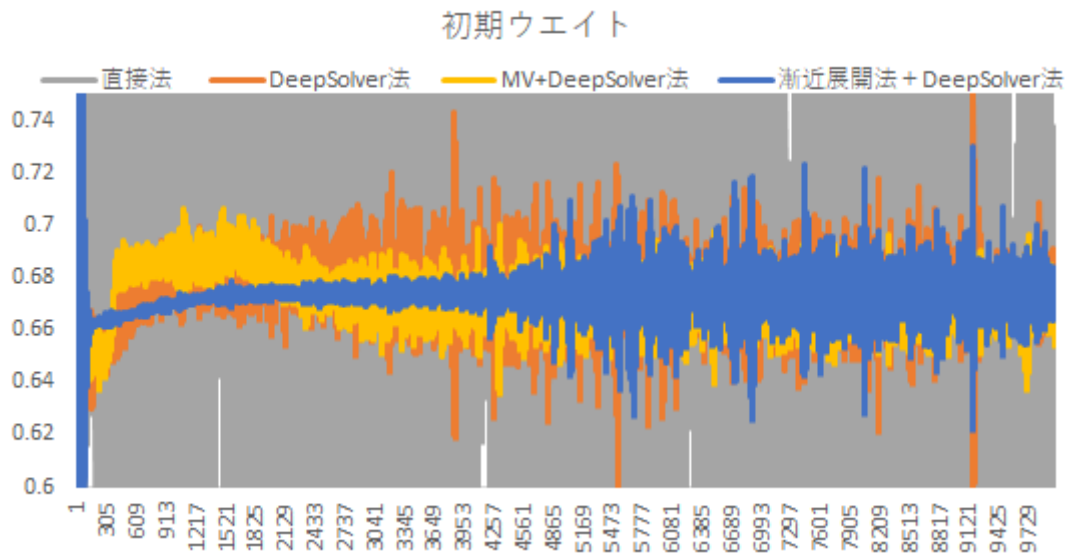


図 9: 初期ウエイト

例 3 を DeepSolver 法・MV+DeepSolver 法・漸近展開法 +DeepSolver 法で解いた場合の初期ウエイトを示す。横軸はトレーニング回数で縦軸が初期ウエイトの値である。

定する。一方で、DeepSolver 法は一貫して変動幅が高く収束しているとは言えない可能性がある。また、本提案手法においても学習ステップが 5000 回以上になると初期ウエイトの変動幅が大きくなっており、これは損失関数のときに見た現象と同じである。MV+DeepSolver 法については、本提案手法よりも収束にトレーニング回数を要するものの、例 1 と比べて差が小さくなることも分かる。

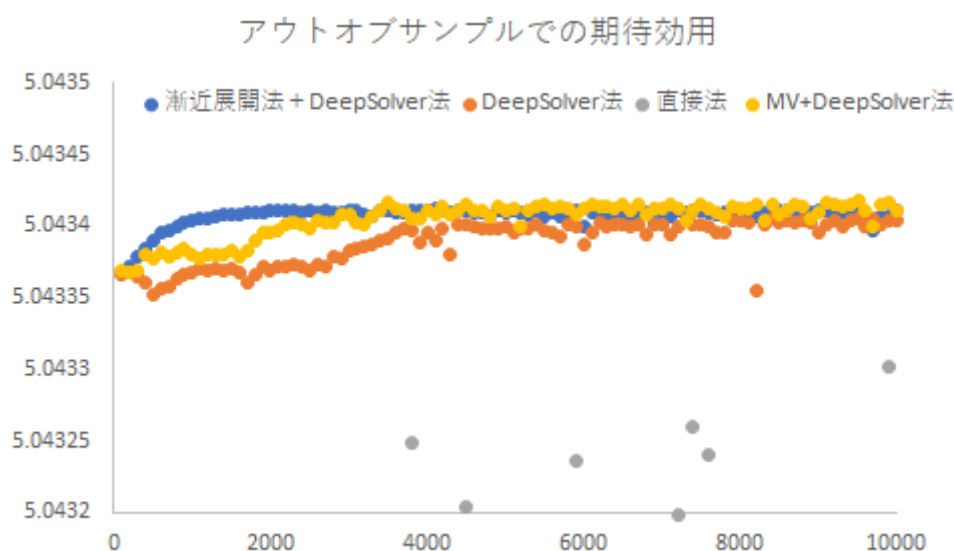


図 10: アウトオブサンプルでの期待効用

例 3 を DeepSolver 法・MV+DeepSolver 法・漸近展開法 + DeepSolver 法で解いた場合のアウトオブサンプルでの期待効用を示す。横軸はトレーニング回数で縦軸がアウトオブサンプルでの期待効用の値である。

図 10 はアウトオブサンプルにおける期待効用の結果である。まず、例 1, 2 と異なり MV+DeepSolver 法が DeepSolver 法をアウトパフォーマンスしている。これは前述のとおり、 $\gamma = 0.2$ としたため真のポートフォリオが平均分散ポートフォリオに近づいたことによると考えられ、自然な結果に思われる。一方で、本提案手法と MV+DeepSolver 法のパフォーマンスの間には依然として大きな差があることは注目に値する。

9.2.4 例 4: $\gamma = 0.2, \sigma_2 = 0.21/0.03637 \times 1$

損失関数の結果を図 11 に示す。まず、 σ_2 の低下により全体的に値が下がることは以前の例と同様である。また、本提案手法が最も速く低下することも変わらない。一方で、トレーニング回数が 4000 を超えると本提案手法に比べ DeepSolver 法や MV+DeepSolver 法の変動幅が著しく小さくなっている。

図 12 に初期ポートフォリオウエイトを示す。損失関数における比較とほぼ同様の傾向が見られ、これまでの例と違い、本提案手法の優位性はそれほど大きくない印象を受ける。

図 13 はアウトオブサンプルにおける期待効用の結果である。これを見ると損失関数や初期ウエイトでの比較と大きく異なり、やはり本提案手法が安定的に優位であることが分かる。本研究においてはポートフォリオが実際に達成する価値関数の値に最も興味があるため、こうした比較の重要性が示唆される結果になった。

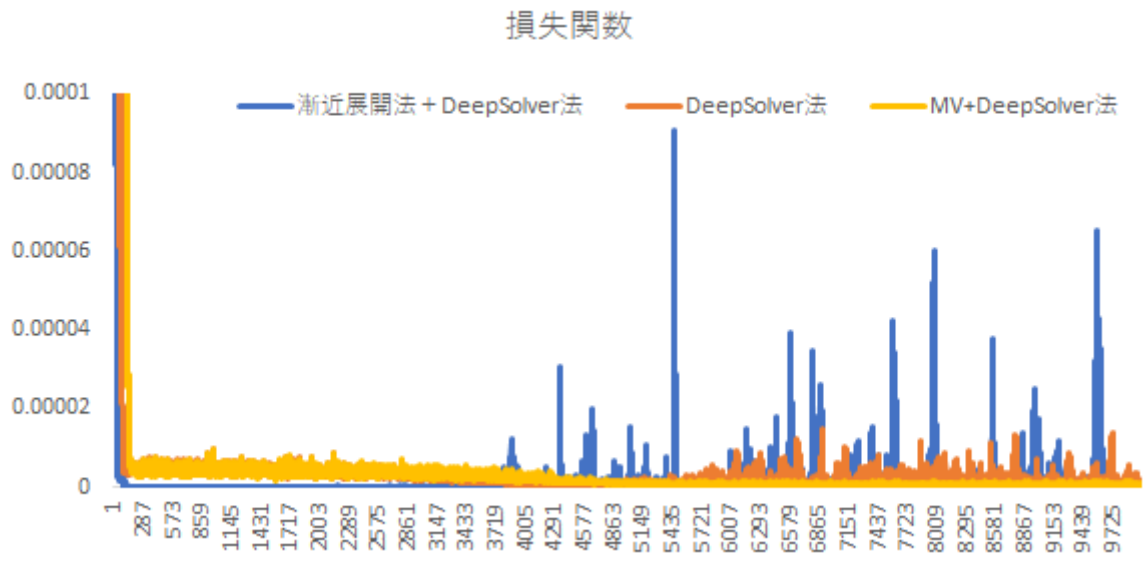


図 11: 損失関数

例 4 を DeepSolver 法・MV+DeepSolver 法・漸近展開法 +DeepSolver 法で解いた場合の損失関数を示す。横軸はトレーニング回数で縦軸が損失関数の値である。

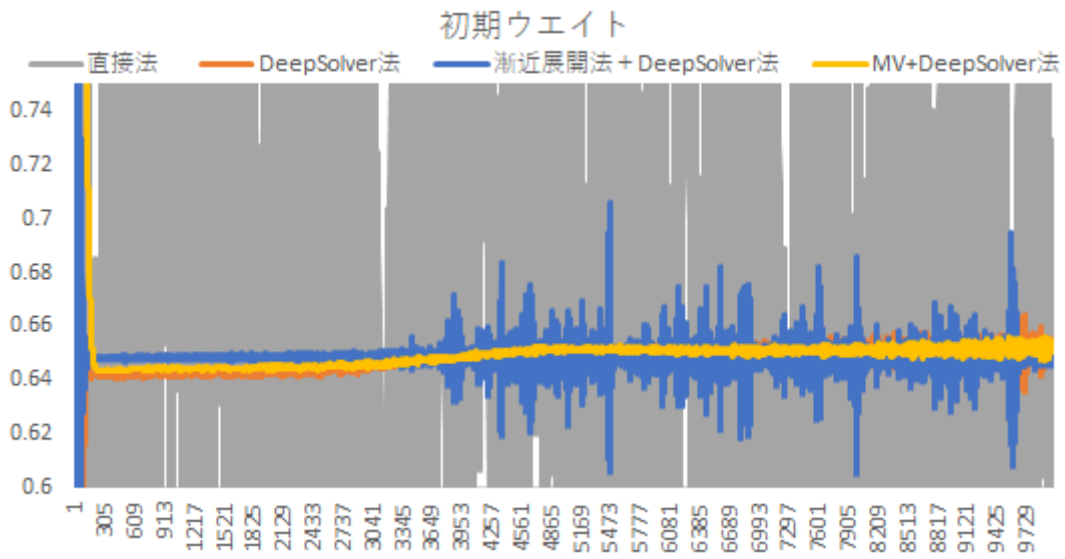


図 12: 初期ウェイト

例 4 を DeepSolver 法・MV+DeepSolver 法・漸近展開法 +DeepSolver 法で解いた場合の初期ウェイトを示す。横軸はトレーニング回数で縦軸が初期ウェイトの値である。

アウトオブサンプルでの期待効用

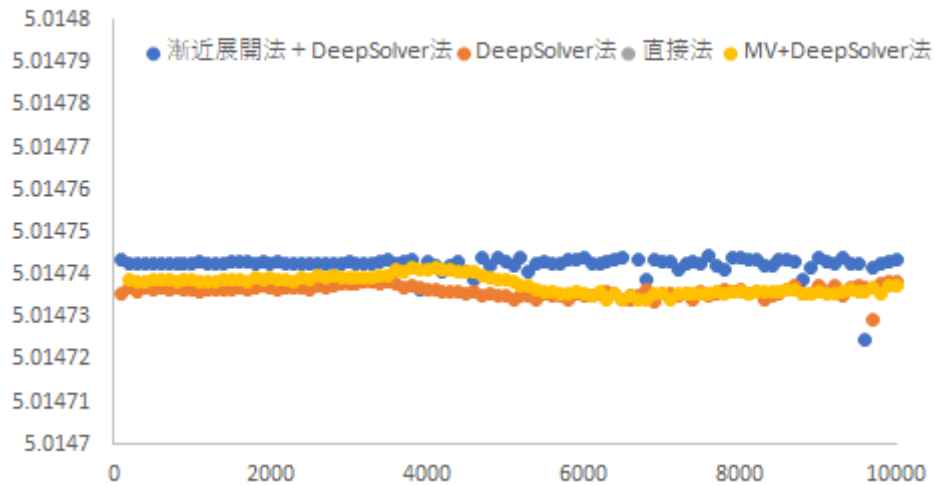


図 13: アウトオブサンプルでの期待効用

例 4 を DeepSolver 法・MV+DeepSolver 法・漸近展開法 +DeepSolver 法で解いた場合のアウトオブサンプルでの期待効用を示す。横軸はトレーニング回数で縦軸がアウトオブサンプルでの期待効用の値である。

10 結論

本稿では最適ポートフォリオ問題を BSDE で表現し漸近展開法と DeepSolver 法を組み合わせることでより効率的に解く方法を提案した。これまで BSDE に対する数値解法は、漸近展開法と組み合わせるものも含め多くの手法が提案されていたが、筆者の知る限り、本稿で扱ったような最適ポートフォリオ問題への応用は既に述べた通り容易でないものが多い。

そこで本稿では最適ポートフォリオを漸近展開法により近似し、それを DeepSolver 法により補完する方法を提案した。数値例からわかるように全ての例において本提案手法はトレーニング回数が少ない段階で損失関数がより速く低下し収束に向かうような振る舞いをみせた。また、初期ウエイトにおいても同様の傾向が見られることを確認した。一方で、トレーニング回数が増加すると損失関数や初期ウエイトは本提案手法よりも DeepSolver 法や MV+DeepSolver 法の方が相対的に変動幅が低く安定していた。また本研究では、損失関数や初期ウエイトに加えて、推定されたポートフォリオのパフォーマンスを確認するためにアウトオブサンプルでの期待効用を比較の規準に含めた。その結果、アウトオブサンプルでの期待効用においてはトレーニング回数が増加するに従い直接法以外の 3 手法に差はなくなるが、トレーニング回数が少ない場合にも本提案手法は高い値を取っていることが確認できた。実務上特に重要であるポートフォリオの比較には損失関数や初期ウエイトのみで判断するのではなく、アウトオブサンプルでの期待効用を用いることの重要性が改めて強調される結果となった。

今後の課題としては漸近展開法の精度を上げることが考えられる。ただし、先行研究では漸近展開法の次数を上げることによる改善効果は限定的であることが示唆されている。このほか、実務的に重要なより多くの例を通して手法の有効性の頑健性を行うことも必要であると考えている。また、今回は制約なしの最適ポート

フォリオ問題を扱ったが，制約あり最適ポートフォリオ問題についても漸近展開法と機械学習を組み合わせることでより効率的に最適ポートフォリオを数値的に導くことも考えられる．こちらは今後の研究課題としたい．

Appendix A 漸近展開の準備

以下の形で表される確率過程の漸近展開について Takahashi and Yoshida (2004) に沿って結果を述べる.

$$\zeta_{t,u}^\varepsilon := \exp \left(\int_t^u a_0(X_s^\varepsilon) ds + \int_t^u a(X_s^\varepsilon) dw_s \right), \quad (35)$$

ただし, $a_0 \in C_\uparrow^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R})$, $a \in C_\uparrow^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^r)^{*3}$ とする.

ここで, $\zeta_{t,T}^\varepsilon$ について以下の可積分条件を仮定する.

仮定 2

$$\forall p \in (1, \infty), \sup_{\varepsilon \in (0,1]} \|\zeta_{t,T}^\varepsilon\|_p < \infty. \quad (36)$$

このとき, $\zeta_{t,u}^\varepsilon$ の漸近展開を導くことができる.

補題 2 仮定 2 の下で, $\zeta_{t,T}^\varepsilon$ は次の漸近展開を持つ. $\forall p > 1$,

$$\zeta_{t,T}^\varepsilon \sim \zeta_{t,T}^0 + \varepsilon \zeta_{t,T}^{[1]} + \frac{\varepsilon^2}{2} \zeta_{t,T}^{[2]} + o(\varepsilon^2). \quad (37)$$

ただし,

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_{t,T}^0 = \exp \left(\int_t^T a_0(X_s) ds + \int_t^T a(X_s) dw_s \right), \\ \zeta_{t,T}^{[1]} = \zeta_{t,T}^0 \left(\int_t^T \partial_x a_0(X_s) D(t; s) ds + \int_t^T \partial_x a(X_s) D(t; s) dw_s \right) \\ \zeta_{t,T}^{[2]} = \zeta_{t,T}^0 \left\{ \left(\int_t^T \partial_x a_0(X_s) D(t; s) ds + \int_t^T \partial_x a(X_s) D(t; s) dw_s \right)^2 \right\} \\ \quad + \zeta_{t,T}^0 \left\{ \int_t^T \partial_x a_0(X_s) E(t; s) ds + \int_t^T \partial_x a(X_s) E(t; s) dw_s \right\} \\ \quad + \zeta_{t,T}^0 \left\{ \int_t^T \partial_x^2 a_0(X_s) [D(t; s), D(t; s)] ds + \int_t^T \partial_x^2 a(X_s) [D(t; s), D(t; s)] dw_s \right\} \end{array} \right.$$

また, 次の確率過程の漸近展開を導く.

$$g^{\alpha, \varepsilon} = \int_t^T \partial f(X_u^\varepsilon) Y_{t,u}^\varepsilon V(x_t, \varepsilon) dw_u^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \dots, r, \quad (38)$$

ただし, $f \in C_\uparrow^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R})$ である.

このとき, $g^{\alpha, \varepsilon}$ の漸近展開を導くことができる.

補題 3 $g^{\alpha, \varepsilon}$ は次の漸近展開を持つ. $\forall p > 1$,

$$g^{\alpha, \varepsilon} \sim \varepsilon g^{\alpha, [1]} + \frac{\varepsilon^2}{2} g^{\alpha, [2]} + o(\varepsilon^2),$$

*3 $C_\uparrow^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R})$: $C^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R})$ かつすべての偏微分係数が多項式オーダーであるものの集合

ただし,

$$\left\{ \begin{array}{l} g^{\alpha,[1]} = \int_t^T \partial_x f(X_u) [Y_{t,u} \partial_\varepsilon V(x_t, 0)] dw_u^\alpha \\ g^{\alpha,[2]} = 2 \int_t^T \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \partial_i \partial_j f(X_u) D^{(j)}(t; u) Y_{t,u}^{(i, \cdot)} \partial_\varepsilon V(x_t, 0) dw_u^\alpha \\ \quad + 2 \int_t^T \sum_{i=1}^d \partial_i f(X_u) Y_{t,u}^{[1],(i, \cdot)} \partial_\varepsilon V(x_t, 0) dw_u^\alpha \\ \quad + \int_t^T \sum_{i=1}^d \partial_i f(X_u) Y_{t,u}^{(i, \cdot)} \partial_\varepsilon^2 V(x_t, 0) dw_u^\alpha. \end{array} \right. \quad (39)$$

以上の準備の下で, 最適ポートフォリオウエイト (9) に対する漸近展開を導く. (9) の第一項は現在の情報を用いてすでに簡潔に表現できているので, 第二項を E とおき, E に対して漸近展開を導く.

$$\begin{aligned} E \equiv & \frac{1}{\mathbf{E}[(H_{0,t,T})^{-\gamma/(1-\gamma)}]} \mathbf{E} \left[(H_{0,t,T})^{-\gamma/(1-\gamma)} \times \right. \\ & \left(\int_t^T \partial r(X_u^\varepsilon) y_{t,u}^\varepsilon v(x, \varepsilon) du + \right. \\ & \sum_{\alpha=1}^d \int_t^T \partial \theta_\alpha(X_u^\varepsilon) y_{t,u}^\varepsilon v(x, \varepsilon) dw^\alpha(u) + \\ & \left. \left. + \sum_{\alpha=1}^d \int_t^T \theta_\alpha(X_u^\varepsilon) \partial \theta_\alpha(X_u^\varepsilon) y_{t,u}^\varepsilon v(x, \varepsilon) du \right) \right] \end{aligned} \quad (40)$$

とおく. このとき, E の各項について考える. まず, 補題 2 を用いて $H_{0,t,T}$ を漸近展開する.

$$H_{0,t,T} = \exp \left(- \int_t^T \theta(X_u^\varepsilon)^\top dw(u) - \frac{1}{2} \int_t^T |\theta(X_u^\varepsilon)|^2 du - \int_t^T r(X_u^\varepsilon) du \right)$$

であるので,

$$\begin{aligned} a_0(X_s^\varepsilon) &:= \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right) r(X_s^\varepsilon) r(X_s^\varepsilon) + \left| \frac{\gamma}{2(1-\gamma) |\theta(X_s^\varepsilon)|} \right|^2, \\ a(X_s^\varepsilon) &:= \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \theta^*(X_s^\varepsilon). \end{aligned}$$

と定義すると,

$$\zeta_{t,T}^\varepsilon \equiv (H_{0,t,T})^{-\gamma/(1-\gamma)}.$$

よって、補題 2 より

$$\begin{aligned}
(H_{0,t,T})^{-\gamma/(1-\gamma)} &= \exp \left[\frac{\gamma}{1-\gamma} \int_t^T r^{[0]}(u) du \right] \exp \left[\frac{\gamma}{2(1-\gamma)^2} \int_t^T |\theta^{[0]}(u)|^2 du \right] \\
&\times \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^2 \int_t^T |\theta^{[0]}(u)|^2 du + \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \int_t^T \theta^{[0]}(u) dw(u) \right] \\
&\times \left(1 + \varepsilon \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \int_t^T \partial r^{[0]}(u) D(t; u) du \right. \\
&\times \varepsilon \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \sum_{\alpha=1}^d \int_t^T \partial \theta_{\alpha}^{[0]}(u) D(t; u) dw_{\alpha}(u) \\
&\times \varepsilon \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \sum_{\alpha=1}^d \int_t^T \theta_{\alpha}^{[0]}(u) \partial \theta_{\alpha}^{[0]}(u) D(t; u) du \left. \right) \\
&+ o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

次に、補題 3 を用いて積分

$$\left(\int_t^T \partial r(X_u^{\varepsilon}) y_{t,u}^{\varepsilon} v(x, \varepsilon) du + \sum_{\alpha=1}^d \int_t^T \partial \theta_{\alpha}(X_u^{\varepsilon}) y_{t,u}^{\varepsilon} v(x, \varepsilon) dw^{\alpha}(u) + \sum_{\alpha=1}^d \int_t^T \theta_{\alpha}(X_u^{\varepsilon}) \partial \theta_{\alpha}(X_u^{\varepsilon}) y_{t,u}^{\varepsilon} v(x, \varepsilon) du \right)$$

を漸近展開する.

$$\begin{aligned}
g_r^{\varepsilon} &:= \int_t^T \partial r(u) y_{t,u}^{\varepsilon} v(x, \varepsilon) du \\
g_{\theta}^{\alpha, \varepsilon} &:= \int_t^T \partial \theta_{\alpha}(u) y_{t,u}^{\varepsilon} v(x, \varepsilon) dw^{\alpha}(u), \\
g_{\theta^2}^{\alpha, \varepsilon} &:= \int_t^T \theta_{\alpha}(u) \partial \theta_{\alpha}(u) y_{t,u}^{\varepsilon} v(x, \varepsilon) du
\end{aligned} \tag{41}$$

とおく. このとき、次の補題のように漸近展開が導ける.

補題 4 $g_r^{\varepsilon}, g_{\theta}^{\alpha, \varepsilon}, g_{\theta^2}^{\alpha, \varepsilon}$ を ε^2 のオーダーまで漸近展開すると以下が得られる*4.

$$\begin{aligned}
g_r^{\varepsilon} &= \varepsilon g_r^{[1]} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 g_r^{[2]} + o(\varepsilon^2), \\
g_{\theta}^{\alpha, \varepsilon} &= \varepsilon g_{\theta}^{\alpha, [1]} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 g_{\theta}^{\alpha, [2]} + o(\varepsilon^2), \\
g_{\theta^2}^{\alpha, \varepsilon} &= \varepsilon g_{\theta^2}^{\alpha, [1]} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 g_{\theta^2}^{\alpha, [2]} + o(\varepsilon^2),
\end{aligned} \tag{42}$$

ただし、 ε の係数 $g_r^{[1]}, g_{\theta}^{\alpha, [1]}, g_{\theta^2}^{\alpha, [1]}$ は以下で与えられ、

$$\begin{aligned}
g_r^{[1]} &= \int_t^T \partial r^{[0]}(u) y_{t,u} \partial_{\varepsilon} v(x, 0) du, \\
g_{\theta}^{\alpha, [1]} &= \int_t^T \partial \theta_{\alpha}^{[0]}(u) y_{t,u} \partial_{\varepsilon} v(x, 0) dw^{\alpha}(u), \\
g_{\theta^2}^{\alpha, [1]} &= \int_t^T \theta_{\alpha}^{[0]}(u) \partial \theta_{\alpha}^{[0]}(u) y_{t,u} \partial_{\varepsilon} v(x, 0) du,
\end{aligned} \tag{43}$$

*4 ただし、以降の結果では ε -オーダーまでの結果を使用する.

ε^2 の係数 $g_r^{[2]}, g_\theta^{\alpha, [2]}, g_{\theta^2}^{\alpha, [2]}$ は以下で与えられる.

$$\begin{aligned}
g_r^{[2]} &= 2 \left(\int_t^T \partial^2 r^{[0]}(u) [D(t; u)] y_{t,u} du + \int_t^T \partial r^{[0]} y_{t,u}^{[1]} du \right) \partial_\varepsilon v(x, 0) + \\
&\quad + \left(\int_t^T \partial r^{[0]}(u) y_{t,u} du \right) \partial_\varepsilon^2 v(x, 0), \\
g_\theta^{\alpha, [2]} &= 2 \left(\int_t^T \partial^2 \theta_\alpha^{[0]}(u) [D(t; u)] y_{t,u} dw^\alpha(u) + \int_t^T \partial^2 \theta_\alpha^{[0]}(u) y_{t,u}^{[1]} dw^\alpha(u) \right) \partial_\varepsilon v(x, 0) + \\
&\quad + \left(\int_t^T \partial \theta_\alpha^{[0]}(u) y_{t,u} dw^\alpha(u) \right) \partial_\varepsilon^2 v(x, 0), \\
g_{\theta^2}^{\alpha, [2]} &= 2 \left(\int_t^T \left\{ (\partial \theta_\alpha^{[0]}(u))^2 + \theta_\alpha^{[0]}(u) \partial^2 \theta_\alpha^{[0]}(u) \right\} [D(t; u)] y_{t,u} du + \int_t^T \theta_\alpha^{[0]}(u) \partial \theta_\alpha^{[0]}(u) y_{t,u}^{[1]} du \right) \partial_\varepsilon v(x, 0) + \\
&\quad + \left(\int_t^T \theta_\alpha^{[0]}(u) \partial \theta_\alpha^{[0]}(u) y_{t,u} du \right) \partial_\varepsilon^2 v(x, 0). \tag{44}
\end{aligned}$$

ただし、以下の記号を用いている.

$$\begin{aligned}
(\partial \theta_\alpha^{[0]}(u))^2 [D(t; u)] y_{t,u} &\equiv \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\partial_i \theta_\alpha^{[0]}(u)) (\partial_j \theta_\alpha^{[0]}(u)) \left\{ D^{(j)}(t; u) \right\} y_{t,u}^{i, \cdot}, \\
\partial^2 \theta_\alpha^{[0]}(u) [D(t; u)] y_{t,u} &\equiv \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \partial_i \partial_j \theta_\alpha^{[0]}(u) \left\{ D^{(j)}(t; u) \right\} y_{t,u}^{(i, \cdot)}.
\end{aligned}$$

以上より、(40) の E の各項の漸近展開を導けたので、 E の各期待値に対する漸近展開を求めると、まず、

$$\begin{aligned}
E(1) &:= \mathbf{E} \left[(H_{0,t,T})^{-\gamma/(1-\gamma)} \times \left(\int_t^T \partial r(X_u^\varepsilon) y_{t,u}^\varepsilon v(x, \varepsilon) du + \right. \right. \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^d \int_t^T \partial \theta_\alpha(X_u^\varepsilon) y_{t,u}^\varepsilon v(x, \varepsilon) dw^\alpha(u) + \\
&\quad \left. \left. + \sum_{\alpha=1}^d \int_t^T \theta_\alpha(X_u^\varepsilon) \partial \theta_\alpha(X_u^\varepsilon) y_{t,u}^\varepsilon v(x, \varepsilon) \right) \right].
\end{aligned}$$

とおくと、 $E = \frac{1}{\mathbf{E}[(H_{0,t,T})^{-\gamma/(1-\gamma)}]} E(1)$ と書くことができ、 $E(1)$ の ε オーダーまでの漸近展開は以下のよう
に導ける.

補題 5 $E(1)$ の ε のオーダーまでの漸近展開は以下のようになる.

$$\begin{aligned}
E(1) &= e^{\gamma/(1-\gamma)} \int_t^T r^{[0]}(u) du e^{[\gamma/2(1-\gamma)^2] \int_t^T |\theta^{[0]}(u)|^2 du} \varepsilon \left(\int_t^T \partial r^{[0]}(u) y_{t,u} du + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{1-\gamma} \sum_{\alpha=1}^d \int_t^T \theta_\alpha^{[0]}(u) \partial \theta_\alpha^{[0]}(u) y_{t,u} du \right) \partial_\varepsilon v(x, 0) + o(\varepsilon). \tag{45}
\end{aligned}$$

よって、このとき積に対する微分の関係を用いれば E の ε オーダーまでの漸近展開は以下のよう
に導ける.

補題 6 E の漸近展開 ε オーダーまでの漸近展開は以下で与えられる.

$$E = \varepsilon \left(\int_t^T \partial r^{[0]}(u) y_{t,u} du + \frac{1}{1-\gamma} \sum_{\alpha=1}^d \int_t^T \theta_{\alpha}^{[0]}(u) \partial \theta_{\alpha}^{[0]}(u) y_{t,u} du \right) \times \partial_{\varepsilon} v(x, 0) + o(\varepsilon). \quad (46)$$

補題 6 で求めた E の漸近展開を最適ポートフォリオウェイト (9) に代入すると, 解析的な近似解が得られる.

参考文献

- Cvitanic, J. and Karatzas, I. (1992) “Convex duality in constrained portfolio optimization,” *The Annals of Applied Probability*, 2, 767–818.
- Detemple, J. R., Garcia, J. R. and Rindisbacher, M. (2003) “A Monte Carlo Method for Optimal Portfolios,” *The Journal of Finance*, 58, 401–446.
- E, W., Han, J. and Jentzen, A. (2017) “Deep learning-based numerical methods for high-dimensional parabolic partial differential equations and backward stochastic differential equations,” *Commun. Math. Stat.*, 5(4), 349–380.
- Fujii, M. and Takahashi, A. (2012) “Analytical approximation for non-linear FBSDEs with perturbation scheme,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 15, 5, 1250034 (24).
- Fujii, M. and Takahashi, A. (2015) “Perturbative expansion technique for non-linear FBSDEs with interacting particle method,” *Asia-Pacific Financial Markets*, 22(3), 283–304.
- Fujii, M. and Takahashi, A. (2018) “Solving backward stochastic differential equations with quadratic-growth drivers by connecting the short-term expansions,” *Stochastic Processes and their Applications*, in press.
- Fujii, M. and Takahashi, A. (2018) “Quadratic-exponential growth BSDEs with jumps and their Malliavin’s differentiability,” *Stochastic Processes and their Applications*, 128(6), 2083–2130.
- Fujii, M. and Takahashi, A. (2019) “Asymptotic Expansion for Forward-Backward SDEs with Jumps,” *Stochastics*, 91(2), 175–214.
- Fujii, M. and Takahashi, A. (2019) “Asymptotic Expansion as Prior Knowledge in Deep Learning Method for High dimensional BSDEs,” *Asia-Pac Financ Markets*, 26, 391–408.
- Han, J., Jentzen, A. and E, H. (2018) “Solving high-dimensional partial differential equations using deep learning,” *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 115(34), 8505–8510.
- Hu, Y., Imkeller, P. and Müller, M. (2005) “Utility Maximization in Incomplete Markets,” *The Annals of Applied Probability*, 15(3), 1691–1712.
- Karatzas, I., Lehoczky, J. P., Shreve, S. E. and Xu, G. L. (1991) “Martingale and duality methods for utility maximization in a incomplete market,” *SIAM J. Control Optimization*, 29, 702–730.
- Kim, Y. and Kunitomo, N. (1999) “Pricing options under stochastic interest rates,” *Asia-Pacific Financial Markets*, 6, 49–70.
- Kunitomo, N. and Takahashi, A. (1992) “Pricing average options,” *Jpn. Financial Rev.*, 14, 1–20.
- Kunitomo, N. and Takahashi, A. (2001) “The Asymptotic Expansion Approach to the Valuation of Interest Rate Contingent Claims,” *Mathematical Finance*, 11, 117–151.
- Kunitomo, N. and Takahashi, A. (2003) “On validity of the asymptotic expansion approach in contingent claim analysis,” *The Annals of Applied Probability*, 13.
- Li, C. (2014) “Closed-form Expansion, Conditional Expectation, and Option Valuation,” *Mathematics of Operations Research*, 39(2).
- Merton, R. C., (1969) “Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case,” *Review of Economics and Statistics*, 51, 247–257.

- Merton, R. C., (1971) “Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model,” *Journal of Economic Theory*, 3, 373–413.
- Nishiba, M. (2013) “Pricing Exotic Options and American Options: A Multidimensional Asymptotic Expansion Approach,” *Asia-Pacific Financial Markets*, 20(2), 147–182.
- Ocone, D. and Karatzas, I., (1991) “A generalized clark representation formula, with application to optimal portfolios,” *Stochastics and Stochastics Reports*, 34, 187–220.
- Osajima, Y. (2006) “The Asymptotic Expansion Formula of Implied Volatility for Dynamic SABR Model and FX Hybrid Model,” *Preprint, Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo*.
- Samuelson, P. A., (1969) “Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming,” *Review of Economics and Statistics*, 51, 239–246.
- Shiraya, K. and Takahashi, A. (2013) “Pricing Basket Options under Local Stochastic Volatility with Jumps,” *CARF-F*, 336.
- Shiraya, K. and Takahashi, A. (2014) “Pricing Multi-Asset Cross Currency Options,” *Journal of Futures Markets*, 34(1), 1–19.
- Shiraya, K., Takahashi, A. and Toda, M. (2011) “Pricing Barrier and Average Options under Stochastic Volatility Environment,” *Journal of Computational Finance*, 15(2), 111–148.
- Shiraya, K., Takahashi, A. and Yamazaki, A. (2011) “Pricing Swaptions under the LIBOR Market Model of Interest Rates with Local-Stochastic Volatility Models,” *Wilmott*, 2011(54), 61–73.
- Shiraya, K., Takahashi, A. and Yamada, T. (2012) “Pricing Discrete Barrier Options under Stochastic Volatility,” *Asia Pacific Financial Markets*, 19(3), 205–232.
- Takahashi, A. (1999) “An asymptotic expansion approach to Pricing contingent claims,” *Asia-Pacific Financial Markets*, 6, 115–151.
- Takahashi, A. and Takehara, K. (2007) “An Asymptotic Expansion Approach to Currency Options with a Market Model of Interest Rates under Stochastic Volatility Processes of Spot Exchange Rates,” *Asia-Pacific Financial Markets*, 14, 69–121.
- Takahashi, A. and Takehara, K. (2008a) “Fourier Transform Method with an Asymptotic Expansion Approach: an Applications to Currency Options,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 11(4), 381–401.
- Takahashi, A. and Takehara, K. (2008b) “A Hybrid Asymptotic Expansion Scheme: an Application to Currency Options,” *CARF-F*, 116.
- Takahashi, A. and Takehara, K. (2010a) “A Hybrid Asymptotic Expansion Scheme: an Application to Long-term Currency Options,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 13(8), 1179–1221.
- Takahashi, A. and Takehara, K. (2010b) “Asymptotic Expansion Approaches in Finance: Applications to Currency Options,” *Finance and Banking Developments*, 185–232.
- Takahashi, A. and Yoshida, N. (2004) “An Asymptotic Expansion Scheme for Optimal Investment Problems,” *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 7, 153–188.
- Takahashi, A. and Yamada, T. (2012) “An Asymptotic Expansion with Push-Down of Malliavin Weights,” *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 3, 95–136.
- Takahashi, A. and Yamada, T. (2011) “A Remark on Approximation of the Solutions to Partial Differ-

- ential Equations in Finance,” *Recent Advances in Financial Engineering*, 3, 95–136.
- Takahashi, A. and Yamada, T. (2016) “An Asymptotic Expansion for Forward-Backward SDEs: A Malliavin Calculus Approach,” *Asia-Pacific Finan Markets*, 23, 337–373.
- Takahashi, A., Tsuchida, Y. and Yamada, T. (2021) “A new efficient approximation scheme for solving high-dimensional semilinear PDEs: control variate method for Deep BSDE solver,” *arXiv*.