

# RFR 下における cap/floor の評価について (Pricing cap/floor with Risk Free Rate)

竹田 凌

東京都立大学 大学院経営学研究科

2023 年 3 月 11 日 (土)

# 目次

- 1 動機
- 2 問題設定
- 3 短期金利アプローチ
- 4 数値検証
- 5 まとめ

# 動機

- ロンドン銀行間取引金利（London Interbank Offered Rate, 以下、LIBOR）は、米ドルの一部テナー（期間）を除き、2021年12月末をもって公表停止。2023年6月末には全テナーが公表停止。
- 代替金利指標としては、リスク・フリー・レート（以下、RFR）が代表的
- RFRにはターム物RFRとオーバーナイト（以下、O/N）RFR複利（後決め）がある
- O/N RFR複利は金利を先決めするターム物RFRやLIBORと枠組みと異なる



- 先決め： $\tau_0$  で金利決定
- 後決め： $\tau_1$  で金利決定
- O/N RFR複利の caplet の評価について金利モデルの面から研究

# 問題設定

- Willems (2021) に沿って、O/N RFR 複利の場合における caplet の評価について整理

金利の参照期間を  $[\tau_0, \tau_1]$  とする。このとき、 $[\tau_0, \tau_1]$  の短期金利  $r_t$  に対して次の確率過程を定義する。

$$R_t := \mathbb{E}_t^{\tau_1} \left[ \frac{1}{\tau_1 - \tau_0} \left( \exp \left( \int_{\tau_0}^{\tau_1} r_s ds \right) - 1 \right) \right], \text{ for } t \leq \tau_1 \quad (1)$$

ここで、 $\mathbb{E}_t^{\tau_1}[\cdot]$  は  $(\tau_1-)$  フォワード測度  $\mathbb{Q}^{\tau_1}$  の下での  $\mathcal{F}_t$  に関する条件付き期待値。

## 問題設定

時点  $\tau_1$  で発生する payoff ( $K$  : 行使金利)

- ターム物 RFR に対する caplet (forward looking caplet) の payoff

$$V_{cpl}^f(\tau_1) := (R_{\tau_0} - K)^+(\tau_1 - \tau_0)$$

- O/N RFR 複利に対する caplet (backward looking caplet) の payoff

$$V_{cpl}^b(\tau_1) := (R_{\tau_1} - K)^+(\tau_1 - \tau_0) \quad (2)$$

時点  $t \leq \tau_1$  における backward looking caplet の価値

$$V_{cpl}^b(t) = P(t, \tau_1) \mathbb{E}_t^{\tau_1} [(R_{\tau_1} - K)^+(\tau_1 - \tau_0)] \quad (3)$$

ただし、 $P(t, \tau_1)$  は  $[t, \tau_1]$  の割引債価格。

## ■ forward looking caplet

- 1 Hull and White (1990) : Hull White モデル
- 2 Hagan *et al.* (2002) : SABR モデル
- 3 Brace, Gatarek and Musiela (1997) : LIBOR Market Model (LMM)
- 4 Rebonato, McKay and White (2011) : SABR LMM
- 5 Beyna (2013) : Cheyette モデル

## ■ backward looking caplet

- 1 Willems (2021) : shifted dynamic SABR モデル
- 2 Turfus (2022) : Gaussian 短期金利モデル
- 3 Lyashenko and Mercurio (2019) : LMM を拡張  
⇒例として、一般の Cheyette モデルを扱う

# 短期金利アプローチ

- Quasi-Gaussian モデルでの評価について提案
- 短期金利にアフィン構造を仮定  
⇒ボラティリティスマイルに対して、近似を用いる必要なく、柔軟にキャリブレーションを可能
- Duffie, Pan and Singleton (2000) の手法を参考
  - 1 フーリエ変換によって導出した非線形常微分方程式の解を用いて、caplet 価格を表現
  - 2 この常微分方程式の解に対し、フーリエ逆変換をすることで caplet 価格を得る

# 短期金利アプローチ

## 定義 1 (Quasi-Gaussian モデル)

Quasi-Gaussian モデルは、確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$  で  $(x_t, y_t)$  が以下の確率微分方程式に従う。

$$\begin{aligned} dx_t &= (y_t - \kappa(t)x_t)dt + \sigma_r(t, x_t, y_t, \omega)dW_t \\ dy_t &= (\sigma_r^2(t, x_t, y_t, \omega) - 2\kappa(t)y_t)dt \\ x_0 &= y_0 = 0 \\ r_t &= h(t, x_t) \end{aligned} \tag{4}$$

ただし、 $\kappa: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$ 。

- Gaussian 短期金利モデル：ボラティリティが定数もしくは確定的関数であるモデル
- Quasi-Gaussian モデル：ボラティリティを局所ボラティリティや確率ボラティリティに拡張したモデル

## アフィンアプローチ

$\sigma_r(t, x, y, \omega)$  が  $\omega$  に依存しない場合 (局所ボラティリティの場合)

$$\begin{aligned} dx_t &= (y_t - \kappa(t)x_t)dt + \sigma_r(t, x_t, y_t)dW_t \\ dy_t &= (\sigma_r^2(t, x_t, y_t) - 2\kappa(t)y_t)dt \\ x_0 &= y_0 = 0 \\ r_t &= h(t, x_t) \end{aligned} \tag{5}$$

短期金利がアフィン構造を持つようボラティリティ関数  $\sigma_r(t, x, y)$  を以下のように仮定

$$\begin{aligned} \sigma_r^2(t, x, y) &= g_0(t) + g_1(t)x + g_2(t)y \\ h(t, x) &= f(0, t) + x \end{aligned} \tag{6}$$

ただし、 $g_0, g_1, g_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(0, t)$  は時刻 0 における時刻  $t$  に対する瞬時的フォワードレート。

(6) 式の右辺は一般に非負であるとは限らないが、((6) 式の右辺)  $< 0$  となる確率が低い場合はこれを無視できるとした (後述)。

## backward looking caplet の評価

リスク中立化法を用いて backward looking caplet を評価

$$\begin{aligned}V_{cpl}^b(t) &= B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{V_{cpl}^b(\tau_1)}{B_{\tau_1}} \right] \\&= B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ B_{\tau_1}^{-1} \left( \frac{1}{\tau_1 - \tau_0} \left( \exp \left( \int_{\tau_0}^{\tau_1} r_s ds \right) - 1 \right) - K \right)^+ \right] (\tau_1 - \tau_0) \\&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-l_{t,\tau_0}} \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-l_{\tau_0,\tau_1}} \left( e^{l_{\tau_0,\tau_1}} - \tilde{K} \right)^+ \right] \right] \\&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-l_{t,\tau_0}} V_{cpl}^b(\tau_0) \right]\end{aligned} \tag{7}$$

ただし、 $B_t := \exp \left( \int_0^t r_s ds \right)$  : マネーマーケットアカウント、 $l_{u,v} := \int_u^v r_s ds$ 、 $\tilde{K} := 1 + (\tau_1 - \tau_0)K$ 。

## backward looking caplet の評価

### 定理 1 (backward looking caplet 評価式)

(7) 式を Duffie, Pan and Singleton (2000) の手法に従い評価

$$\begin{aligned} V_{cpl}^b(t) &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [e^{-l_{t,\tau_0}} V_{cpl}^b(\tau_0)] \\ &= \hat{\mathcal{F}}^{-1}(\Phi_0(\xi) - \tilde{K}\Phi_1(\xi))(\beta)|_{\beta=\ln \tilde{K}} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Phi_\alpha(\xi) := \phi(a, b, c, d, x_t, y_t, t, \tau_0)|_{a=A(\tau_0, \tau_1; \alpha + i\xi), b=B(\tau_0, \tau_1; \alpha + i\xi), c=C(\tau_0, \tau_1; \alpha + i\xi), d=-1} \quad (9)$$

ただし、 $\eta(\alpha + i \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  に対して

$$\hat{\mathcal{F}}^{-1}(\eta(\alpha + i\xi))(\beta) := \int_{-\infty}^{\beta} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi\gamma} \eta(\alpha + i\xi) d\xi \right) d\gamma \quad (10)$$

とする。また、実際の評価においては以下の関係式を用いる。

$$\hat{\mathcal{F}}^{-1}(\eta(\alpha + i\xi))(\beta) = \frac{1}{2}\eta(\alpha) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \text{Im}(e^{-i\xi\beta} \eta(\alpha + i\xi)) d\xi \quad (11)$$

## backward looking caplet の評価 (導出方針 ①)

1  $V_{cpl}^b(\tau_0) = \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-l_{\tau_0, \tau_1}} \left( e^{l_{\tau_0, \tau_1}} - \tilde{K} \right)^+ \right]$  を評価

2  $V_{cpl}^b(\tau_0)$  を  $G_t(\beta; T, \alpha) := \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{\alpha l_{t, T}} 1_{\{l_{t, T} - \beta \geq 0\}} \right]$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) で定義される関数  $G$  で表す。

$$V_{cpl}^b(\tau_0) = G_{\tau_0}(\ln \tilde{K}; \tau_1, 0) - \tilde{K} G_{\tau_0}(\ln \tilde{K}; \tau_1, -1) \quad (12)$$

## backward looking caplet の評価 (導出方針 ①)

1  $V_{cpl}^b(\tau_0) = \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-l_{\tau_0, \tau_1}} \left( e^{l_{\tau_0, \tau_1}} - \tilde{K} \right)^+ \right]$  を評価

2  $V_{cpl}^b(\tau_0)$  を  $G_t(\beta; T, \alpha) := \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [e^{\alpha l_t, \tau_1} 1_{\{l_t, \tau - \beta \geq 0\}}]$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) で定義される関数  $G$  で表す。

$$V_{cpl}^b(\tau_0) = G_{\tau_0}(\ln \tilde{K}; \tau_1, 0) - \tilde{K} G_{\tau_0}(\ln \tilde{K}; \tau_1, -1) \quad (12)$$

3  $\xi \in \mathbb{R}$  に対して、 $\hat{G}_t(\xi; T, \alpha) := \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\beta} \frac{d}{d\beta} G_t(\beta; T, \alpha) d\beta$

とすると、アフィン構造を仮定しているので、 $\hat{G}_t(\xi; T, \alpha)$  は

$$\hat{G}_t(\xi; T, \alpha) = \exp \left( A(t, T; \alpha + i\xi) x_t + B(t, T; \alpha + i\xi) y_t + C(t, T; \alpha + i\xi) \right) \quad (13)$$

とかける。(関数  $A(\cdot, \cdot; \alpha + i\xi), B(\cdot, \cdot; \alpha + i\xi), C(\cdot, \cdot; \alpha + i\xi) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ )

## backward looking caplet の評価 (導出方針 ①)

1  $V_{cpl}^b(\tau_0) = \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-l_{\tau_0, \tau_1}} \left( e^{l_{\tau_0, \tau_1}} - \tilde{K} \right)^+ \right]$  を評価

2  $V_{cpl}^b(\tau_0)$  を  $G_t(\beta; T, \alpha) := \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [e^{\alpha l_t, \tau} 1_{\{l_t, \tau - \beta \geq 0\}}]$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) で定義される関数  $G$  で表す。

$$V_{cpl}^b(\tau_0) = G_{\tau_0}(\ln \tilde{K}; \tau_1, 0) - \tilde{K} G_{\tau_0}(\ln \tilde{K}; \tau_1, -1) \quad (12)$$

3  $\xi \in \mathbb{R}$  に対して、 $\hat{G}_t(\xi; T, \alpha) := \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\beta} \frac{d}{d\beta} G_t(\beta; T, \alpha) d\beta$

とすると、アフィン構造を仮定しているので、 $\hat{G}_t(\xi; T, \alpha)$  は

$$\hat{G}_t(\xi; T, \alpha) = \exp \left( A(t, T; \alpha + i\xi) x_t + B(t, T; \alpha + i\xi) y_t + C(t, T; \alpha + i\xi) \right) \quad (13)$$

とかける。(関数  $A(\cdot, \cdot; \alpha + i\xi), B(\cdot, \cdot; \alpha + i\xi), C(\cdot, \cdot; \alpha + i\xi) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ )

4  $A(t, T; \alpha + i\xi), B(t, T; \alpha + i\xi), C(t, T; \alpha + i\xi)$  を求め、フーリエ逆変換で評価

$$\begin{aligned} V_{cpl}^b(\tau_0) &= G_{\tau_0}(\ln \tilde{K}; \tau_1, 0) - \tilde{K} G_{\tau_0}(\ln \tilde{K}; \tau_1, -1) \\ &= \hat{\mathcal{F}}^{-1} \left( \hat{G}_{\tau_0}(\ln \tilde{K}; \tau_1, 0) - \tilde{K} \hat{G}_{\tau_0}(\ln \tilde{K}; \tau_1, -1) \right) \end{aligned} \quad (14)$$

## backward looking caplet の評価 (導出方針 ②)

- 1 関数  $G$  を用いて、 $V_{cpl}^b(t) = \left( \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^{\tau_0} r_s ds} G_{\tau_0}(\ln \tilde{K}; \tau_1, 0) \right] - \tilde{K} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^{\tau_0} r_s ds} G_{\tau_0}(\ln \tilde{K}; \tau_1, -1) \right] \right)$  と表現
- 2 関数  $H$  を  $H_t(s, T; \alpha, \beta) := \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^s r_u du} G_s(\beta; T, \alpha) \right]$  ( $\beta \in \mathbb{R}, t \leq s$ ) と定義すれば、

$$V_{cpl}^b(t) = H_t(\tau_0, \tau_1; 0, \ln \tilde{K}) - \tilde{K} H_t(\tau_0, \tau_1; -1, \ln \tilde{K}) \quad (15)$$

## backward looking caplet の評価 (導出方針 ②)

- 1 関数  $G$  を用いて、 $V_{cpl}^b(t) = \left( \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-I_t, \tau_0} G_{\tau_0}(\ln \tilde{K}; \tau_1, 0) \right] - \tilde{K} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-I_t, \tau_0} G_{\tau_0}(\ln \tilde{K}; \tau_1, -1) \right] \right)$  と表現
- 2 関数  $H$  を  $H_t(s, T; \alpha, \beta) := \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-I_t, s} G_s(\beta; T, \alpha) \right]$  ( $\beta \in \mathbb{R}, t \leq s$ ) と定義すれば、

$$V_{cpl}^b(t) = H_t(\tau_0, \tau_1; 0, \ln \tilde{K}) - \tilde{K} H_t(\tau_0, \tau_1; -1, \ln \tilde{K}) \quad (15)$$

- 3 導出方針① と フーリエ逆変換 より、

$$H_t(s, T; \alpha, \beta) = \hat{\mathcal{F}}^{-1} \left( \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \exp(-I_t, s + ax_s + by_s + c) \Big|_{a=A(s, T; \alpha + i\xi), b=B(s, T; \alpha + i\xi), c=C(s, T; \alpha + i\xi)} \right] \right) (\beta)$$

## backward looking caplet の評価 (導出方針 ②)

- 1 関数  $G$  を用いて、 $V_{cpl}^b(t) = \left( \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^{\tau_0} G_{\tau_0}(\ln \tilde{K}; \tau_1, 0) } \right] - \tilde{K} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^{\tau_0} G_{\tau_0}(\ln \tilde{K}; \tau_1, -1) } \right] \right)$  と表現
- 2 関数  $H$  を  $H_t(s, T; \alpha, \beta) := \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^s G_s(\beta; T, \alpha) } \right]$  ( $\beta \in \mathbb{R}, t \leq s$ ) と定義すれば、

$$V_{cpl}^b(t) = H_t(\tau_0, \tau_1; 0, \ln \tilde{K}) - \tilde{K} H_t(\tau_0, \tau_1; -1, \ln \tilde{K}) \quad (15)$$

- 3 導出方針① と フーリエ逆変換 より、

$$H_t(s, T; \alpha, \beta) = \hat{\mathcal{F}}^{-1} \left( \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \exp(-\int_t^s a x_s + b y_s + c) \Big|_{a=A(s, T; \alpha+i\xi), b=B(s, T; \alpha+i\xi), c=C(s, T; \alpha+i\xi)} \right] \right) (\beta)$$

- 4 アフィン構造の仮定 から下記の関数  $\phi$  を用いて、定理 1 を導出

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [e^{ax_s + by_s + c + \int_t^s d}] &= \exp(\tilde{A}(t, s; a, b, c, d)x_t + \tilde{B}(t, s; a, b, c, d)y_t + \tilde{C}(t, s; a, b, c, d)) \\ &=: \phi(a, b, c, d, x_t, y_t, t, s) \end{aligned} \quad (16)$$

(関数  $\tilde{A}(\cdot, \cdot; a, b, c, d), \tilde{B}(\cdot, \cdot; a, b, c, d), \tilde{C}(\cdot, \cdot; a, b, c, d) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ )

# 微分方程式による表現

## 関数 $\phi$ の求め方

(16) 式とファインマン・カッツの定理より、 $t \leq s$  で

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_t - (-d \times h(t, x)))\phi(a, b, c, d, x, y, t, s) &= 0 \\ \phi(a, b, c, d, x, y, s, s) &= e^{ax+by+c} \end{aligned} \quad (17)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t &= \frac{\partial}{\partial t} + (y - \kappa(t)x) \frac{\partial}{\partial x} + ((g_0(t) + g_1(t)x + g_2(t)y) - 2\kappa(t)y) \frac{\partial}{\partial y} \\ &\quad + \frac{1}{2}(g_0(t) + g_1(t)x + g_2(t)y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (18)$$

とし、導出される微分方程式 (17) を解く。

導出の詳細は竹田 (2023) に記載。

# 数値検証

- インプライドボラティリティ(IV)を用いて両者を比較
    - 定理 1 で示された方法を使用
      - 1 (17) 式から導出される微分方程式を **Runge-Kutta 法**を用いて数値的に解く
      - 2 (11) 式の**フーリエ逆変換に対して数値積分**を行い caplet を評価
    - (7) 式の表現に対して直接モンテカルロシミュレーションを使用
- 上記 2 種類の評価を行い、それぞれの方法について計算の高速化余地を検討
- IV が (1) フラットな場合と (2) スキューを持つ場合の比較

# 金利の設定

- 1年間の営業日：261日、6か月間の営業日：131日
- 評価時点： $t = 0$  (現在)、  
capletの金利参照期開始日： $\tau_0 = \frac{65}{261}$  (3か月後)、  
金利参照期間終了日： $\tau_1 = \frac{131}{261}$  (6か月後)
- フォワードレートの初期の期間構造は、Bloombergで取得した2022年4月1日時点の残存期間3か月と6か月のJGBのゼロクーポンレートを使用。
- 3か月と6か月のJGBのゼロクーポンレートを線形に補間・補外し、傾き(一定)を導出  
⇒フォワードレートの初期の期間構造は、 $f(0, t) = -0.00057341$  ( $t \leq \tau_1$ )

## Quasi-Gaussian モデルのパラメータ設定 (数値例 (1))

- $\kappa(t) \equiv 1$  :  $x_t$  の平均回帰の強さを制御するパラメータで定数とする。
- 数値検証に必要な離散的時刻  $t_n = \frac{n}{261} (1 \leq n \leq 131)$  での値を以下の通り与える。

$$\begin{aligned}g_0(t_n) &= 0.009 + 0.00001 \times (t_n \times 261) \\g_1(t_n) &= 0.01 + 0.00001 \times (t_n \times 261) \\g_2(t_n) &= 0.01 + 0.00001 \times (t_n \times 261)\end{aligned}\tag{19}$$

以下再掲

短期金利がアフィン構造を持つようボラティリティ関数  $\sigma_r(t, x, y)$  を以下のように仮定

$$\sigma_r^2(t, x, y) = g_0(t) + g_1(t)x + g_2(t)y\tag{6}$$

## Quasi-Gaussian モデルのパラメータ設定

- 金利参照期間の開始日から終了日までの間に ((6) 式の右辺)  $< 0$  となるか確認
- 下図より今回のパラメーターの下では、((6) 式の右辺)  $< 0$  とならないと判断

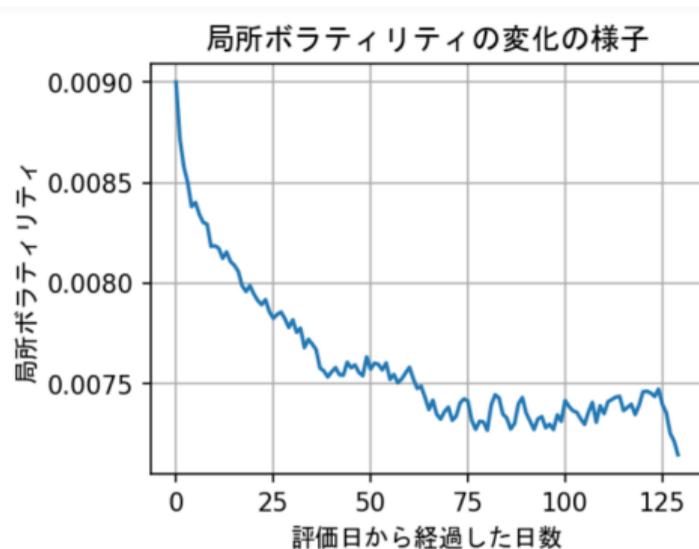


Figure: 4,000,000 のパスのうち、最も小さい値となる ((6) 式の右辺) の値

# 評価設定

- at-the-money (以下、**ATM**)、in-the-money (以下、**ITM**) を ITM1 と ITM2 の2種類、out-of-the-money (以下、**OTM**) を OTM1 と OTM2 の2種類、**計5種類**を比較
- モンテカルロシミュレーションの**パス数 8,000,000 本**、(5)式に対するオイラー・丸山法の離散化における離散幅を **0.00012**
- Runge-Kutta 法で用いる時間の離散幅 (以下、時間の離散幅) も同様に、**0.00012**
- 数値積分で用いる積分区間の分割幅(以下、積分の分割幅) は積分区間  $[0, \infty)$  を  $(0, 400]$  で近似した上で  **$400 \times 2^{-13} = 0.04883$**

## 比較結果 (数値例 (1))

|      | 行使金利     | caplet 価格 (MC) | caplet 価格 (定理 1) | (MC)-(定理 1) |
|------|----------|----------------|------------------|-------------|
| ATM  | 0.00003  | 0.00444237     | 0.00444620       | -0.00000383 |
| ITM1 | -0.01131 | 0.00598370     | 0.00598785       | -0.00000415 |
| ITM2 | -0.02262 | 0.00780945     | 0.00781369       | -0.00000424 |
| OTM1 | 0.01131  | 0.00318942     | 0.00319262       | -0.00000320 |
| OTM2 | 0.02262  | 0.00221092     | 0.00221315       | -0.00000223 |

Table: モンテカルロシミュレーション (MC) と定理 1 の方法による caplet 価格の比較

|      | 行使金利     | IV (MC) | IV (定理 1) | (MC)-(定理 1) |
|------|----------|---------|-----------|-------------|
| ATM  | 0.00003  | 6.330%  | 6.327%    | 0.003%      |
| ITM1 | -0.01131 | 6.298%  | 6.296%    | 0.002%      |
| ITM2 | -0.02262 | 6.266%  | 6.264%    | 0.002%      |
| OTM1 | 0.01131  | 6.361%  | 6.359%    | 0.002%      |
| OTM2 | 0.02262  | 6.392%  | 6.390%    | 0.002%      |

Table: モンテカルロシミュレーション (MC) と定理 1 の方法による IV の比較

# ATM における IV の比較 (数値例 (1))

- モンテカルロシミュレーション
  - オイラー・丸山法における離散化の離散幅が大きくなるにつれ、IV は小さくなる
- 定理 1 の方法
  - Runge-Kutta 法における時間の離散幅が大きくなるにつれ、IV は小さくなる

|             |           | 離散幅     |         |         |         | 離散幅            |                 |         |         |         |        |
|-------------|-----------|---------|---------|---------|---------|----------------|-----------------|---------|---------|---------|--------|
|             |           | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 | 0.00012        | 0.00024         | 0.00048 | 0.00096 | 0.00096 |        |
| パ<br>ス<br>数 | 8,000,000 | 6.330%  | 6.326%  | 6.308%  | 6.274%  | 積              | 2 <sup>13</sup> | 6.327%  | 6.323%  | 6.316%  | 6.300% |
|             | 4,000,000 | 6.325%  | 6.324%  | 6.311%  | 6.272%  | 分              | 2 <sup>12</sup> | 6.326%  | 6.322%  | 6.314%  | 6.299% |
|             | 2,000,000 | 6.326%  | 6.329%  | 6.313%  | 6.282%  | の              | 2 <sup>11</sup> | 6.323%  | 6.319%  | 6.311%  | 6.296% |
|             | 1,000,000 | 6.326%  | 6.320%  | 6.306%  | 6.284%  | 分              | 2 <sup>10</sup> | 6.317%  | 6.314%  | 6.306%  | 6.290% |
|             |           |         |         |         | 割       | 2 <sup>9</sup> | 6.306%          | 6.302%  | 6.295%  | 6.279%  |        |

Table: モンテカルロシミュレーション (ATM)

Table: 定理 1 の方法 (ATM)

# ITMにおける比較結果 (数値例 (1))

|           | 0.00012       | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096       |
|-----------|---------------|---------|---------|---------------|
| 8,000,000 | <b>6.298%</b> | 6.301%  | 6.278%  | <b>6.239%</b> |
| 4,000,000 | 6.292%        | 6.292%  | 6.287%  | 6.240%        |
| 2,000,000 | 6.294%        | 6.298%  | 6.291%  | 6.250%        |
| 1,000,000 | 6.293%        | 6.288%  | 6.271%  | 6.253%        |

Table: モンテカルロシミュレーション (ITM1)

|           | 0.00012       | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096       |
|-----------|---------------|---------|---------|---------------|
| 8,000,000 | <b>6.266%</b> | 6.273%  | 6.247%  | <b>6.204%</b> |
| 4,000,000 | 6.259%        | 6.270%  | 6.256%  | 6.207%        |
| 2,000,000 | 6.261%        | 6.268%  | 6.262%  | 6.218%        |
| 1,000,000 | 6.261%        | 6.256%  | 6.238%  | 6.222%        |

Table: モンテカルロシミュレーション (ITM2)

|          | 0.00012       | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096       |
|----------|---------------|---------|---------|---------------|
| $2^{13}$ | <b>6.296%</b> | 6.292%  | 6.284%  | <b>6.269%</b> |
| $2^{12}$ | 6.294%        | 6.290%  | 6.283%  | 6.267%        |
| $2^{11}$ | 6.286%        | 6.285%  | 6.280%  | 6.264%        |
| $2^{10}$ | 6.283%        | 6.282%  | 6.274%  | 6.259%        |
| $2^9$    | 6.274%        | 6.270%  | 6.263%  | 6.247%        |

Table: 定理1の方法 (ITM1)

|          | 0.00012       | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096       |
|----------|---------------|---------|---------|---------------|
| $2^{13}$ | <b>6.264%</b> | 6.260%  | 6.253%  | <b>6.237%</b> |
| $2^{12}$ | 6.262%        | 6.259%  | 6.251%  | 6.236%        |
| $2^{11}$ | 6.259%        | 6.256%  | 6.248%  | 6.233%        |
| $2^{10}$ | 6.253%        | 6.249%  | 6.242%  | 6.227%        |
| $2^9$    | 6.241%        | 6.236%  | 6.229%  | 6.214%        |

Table: 定理1の方法 (ITM2)

## OTMにおける比較結果（数値例（1））

|           | 0.00012       | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096       |
|-----------|---------------|---------|---------|---------------|
| 8,000,000 | <b>6.361%</b> | 6.363%  | 6.339%  | <b>6.316%</b> |
| 4,000,000 | 6.357%        | 6.357%  | 6.348%  | 6.305%        |
| 2,000,000 | 6.358%        | 6.360%  | 6.351%  | 6.313%        |
| 1,000,000 | 6.358%        | 6.352%  | 6.336%  | 6.222%        |

Table: モンテカルロシミュレーション（OTM1）

|           | 0.00012       | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096       |
|-----------|---------------|---------|---------|---------------|
| 8,000,000 | <b>6.392%</b> | 6.395%  | 6.369%  | <b>6.340%</b> |
| 4,000,000 | 6.389%        | 6.388%  | 6.379%  | 6.338%        |
| 2,000,000 | 6.389%        | 6.391%  | 6.381%  | 6.344%        |
| 1,000,000 | 6.389%        | 6.384%  | 6.368%  | 6.347%        |

Table: モンテカルロシミュレーション（OTM2）

|          | 0.00012       | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096       |
|----------|---------------|---------|---------|---------------|
| $2^{13}$ | <b>6.359%</b> | 6.355%  | 6.347%  | <b>6.331%</b> |
| $2^{12}$ | 6.357%        | 6.353%  | 6.346%  | 6.330%        |
| $2^{11}$ | 6.352%        | 6.350%  | 6.343%  | 6.327%        |
| $2^{10}$ | 6.347%        | 6.345%  | 6.337%  | 6.321%        |
| $2^9$    | 6.337%        | 6.333%  | 6.325%  | 6.310%        |

Table: 定理1の方法（OTM1）

|          | 0.00012       | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096       |
|----------|---------------|---------|---------|---------------|
| $2^{13}$ | <b>6.390%</b> | 6.386%  | 6.378%  | <b>6.363%</b> |
| $2^{12}$ | 6.389%        | 6.381%  | 6.377%  | 6.361%        |
| $2^{11}$ | 6.381%        | 6.379%  | 6.374%  | 6.358%        |
| $2^{10}$ | 6.379%        | 6.375%  | 6.364%  | 6.352%        |
| $2^9$    | 6.366%        | 6.362%  | 6.354%  | 6.339%        |

Table: 定理1の方法（OTM2）

## Quasi-Gaussian モデルのパラメータ設定 (数値例 (2))

- ボラティリティスキューが発生するよう以下のようにパラメータを設定

$$\begin{aligned}g_0(t) &= 0.00901 \\g_1(t) &= 0.09 \\g_2(t) &= 0.09\end{aligned}\tag{20}$$

- 数値例 (1) と同様に以下の式の右辺は負の値をとる確率が低いように設定

$$\sigma_r^2(t, x, y) = g_0(t) + g_1(t)x + g_2(t)y\tag{6}$$

## 比較結果 (数値例 (2))

|      | 行使金利     | caplet 価格 (MC) | caplet 価格 (定理 1) | (MC)-(定理 1) |
|------|----------|----------------|------------------|-------------|
| ITM2 | -0.02262 | 0.00760547     | 0.00761008       | -0.00000461 |
| ITM1 | -0.01311 | 0.00587090     | 0.00587489       | -0.00000399 |
| ATM  | 0.00003  | 0.00444024     | 0.00443561       | 0.00000463  |
| OTM1 | 0.01131  | 0.00330207     | 0.00329932       | 0.00000274  |
| OTM2 | 0.02262  | 0.00241189     | 0.00240646       | 0.00000543  |

Table: モンテカルロシミュレーション (MC) と定理 1 の方法による caplet 価格の比較

|      | 行使金利     | IV (MC) | IV (定理 1) | (MC)-(定理 1) |
|------|----------|---------|-----------|-------------|
| ITM2 | -0.02262 | 5.853%  | 5.861%    | -0.008%     |
| ITM1 | -0.01131 | 6.094%  | 6.099%    | -0.005%     |
| ATM  | 0.00003  | 6.319%  | 6.312%    | 0.007%      |
| OTM1 | 0.01131  | 6.522%  | 6.515%    | 0.007%      |
| OTM2 | 0.02262  | 6.732%  | 6.724%    | 0.008%      |

Table: モンテカルロシミュレーション (MC) と定理 1 の方法による IV の比較

# ATMにおけるIVの比較（数値例（2））

## ■ モンテカルロシミュレーション

- オイラー・丸山法における離散化の離散幅が大きくなるにつれ、IVは小さくなる  
⇒数値例（1）と比較し、変化は緩やか

## ■ 定理1の方法

- Runge-Kutta法における時間の離散幅が大きくなるにつれ、IVは小さくなる  
⇒数値例（1）と同等

|           | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
|-----------|---------|---------|---------|---------|
| 8,000,000 | 6.319%  | 6.306%  | 6.290%  | 6.270%  |
| 4,000,000 | 6.313%  | 6.307%  | 6.287%  | 6.271%  |
| 2,000,000 | 6.304%  | 6.311%  | 6.287%  | 6.272%  |
| 1,000,000 | 6.306%  | 6.312%  | 6.308%  | 6.274%  |

Table: モンテカルロシミュレーション（ATM）

|          | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
|----------|---------|---------|---------|---------|
| $2^{13}$ | 6.312%  | 6.309%  | 6.301%  | 6.286%  |
| $2^{12}$ | 6.311%  | 6.308%  | 6.299%  | 6.284%  |
| $2^{11}$ | 6.308%  | 6.306%  | 6.296%  | 6.280%  |
| $2^{10}$ | 6.302%  | 6.300%  | 6.288%  | 6.271%  |
| $2^9$    | 6.292%  | 6.290%  | 6.278%  | 6.261%  |

Table: 定理1の方法（ATM）

## ITMにおけるIVの比較 (数値例 (2))

|           | 0.00012       | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096       |
|-----------|---------------|---------|---------|---------------|
| 8,000,000 | <b>6.094%</b> | 6.079%  | 6.063%  | <b>6.043%</b> |
| 4,000,000 | 6.086%        | 6.081%  | 6.060%  | 6.044%        |
| 2,000,000 | 6.077%        | 6.086%  | 6.059%  | 6.049%        |
| 1,000,000 | 6.080%        | 6.086%  | 6.078%  | 6.046%        |

Table: モンテカルロシミュレーション (ITM1)

|           | 0.00012       | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096       |
|-----------|---------------|---------|---------|---------------|
| 8,000,000 | <b>5.853%</b> | 5.838%  | 5.819%  | <b>5.800%</b> |
| 4,000,000 | 5.843%        | 5.841%  | 5.817%  | 5.801%        |
| 2,000,000 | 5.832%        | 5.847%  | 5.816%  | 5.806%        |
| 1,000,000 | 5.835%        | 5.847%  | 5.838%  | 5.803%        |

Table: モンテカルロシミュレーション (ITM2)

|          | 0.00012       | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096       |
|----------|---------------|---------|---------|---------------|
| $2^{13}$ | <b>6.099%</b> | 6.095%  | 6.088%  | <b>6.073%</b> |
| $2^{12}$ | 6.097%        | 6.094%  | 6.087%  | 6.072%        |
| $2^{11}$ | 6.093%        | 6.090%  | 6.083%  | 6.069%        |
| $2^{10}$ | 6.088%        | 6.084%  | 6.077%  | 6.064%        |
| $2^9$    | 6.078%        | 6.073%  | 6.068%  | 6.053%        |

Table: 定理1の方法 (ITM1)

|          | 0.00012       | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096       |
|----------|---------------|---------|---------|---------------|
| $2^{13}$ | <b>5.861%</b> | 5.857%  | 5.850%  | <b>5.835%</b> |
| $2^{12}$ | 5.860%        | 5.855%  | 5.849%  | 5.834%        |
| $2^{11}$ | 5.857%        | 5.851%  | 6.845%  | 5.831%        |
| $2^{10}$ | 5.851%        | 5.844%  | 6.838%  | 5.825%        |
| $2^9$    | 5.841%        | 5.834%  | 6.827%  | 5.815%        |

Table: 定理1の方法 (ITM2)

## OTMにおけるIVの比較（数値例（2））

|           | 0.00012       | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096       |
|-----------|---------------|---------|---------|---------------|
| 8,000,000 | <b>6.522%</b> | 6.518%  | 6.503%  | <b>6.483%</b> |
| 4,000,000 | 6.525%        | 6.519%  | 6.500%  | 6.484%        |
| 2,000,000 | 6.517%        | 6.523%  | 6.500%  | 6.490%        |
| 1,000,000 | 6.519%        | 6.525%  | 6.516%  | 6.486%        |

Table: モンテカルロシミュレーション (OTM1)

|           | 0.00012       | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096       |
|-----------|---------------|---------|---------|---------------|
| 8,000,000 | <b>6.732%</b> | 6.721%  | 6.707%  | <b>6.684%</b> |
| 4,000,000 | 6.727%        | 6.721%  | 6.702%  | 6.686%        |
| 2,000,000 | 6.720%        | 6.726%  | 6.703%  | 6.692%        |
| 1,000,000 | 6.722%        | 6.727%  | 6.717%  | 6.688%        |

Table: モンテカルロシミュレーション (OTM2)

|          | 0.00012       | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096       |
|----------|---------------|---------|---------|---------------|
| $2^{13}$ | <b>6.515%</b> | 6.512%  | 6.504%  | <b>6.488%</b> |
| $2^{12}$ | 6.514%        | 6.511%  | 6.503%  | 6.487%        |
| $2^{11}$ | 6.512%        | 6.508%  | 6.500%  | 6.484%        |
| $2^{10}$ | 6.507%        | 6.502%  | 6.493%  | 6.479%        |
| $2^9$    | 6.497%        | 6.492%  | 6.482%  | 6.469%        |

Table: 定理1の方法 (OTM1)

|          | 0.00012       | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096       |
|----------|---------------|---------|---------|---------------|
| $2^{13}$ | <b>6.724%</b> | 6.720%  | 6.712%  | <b>6.695%</b> |
| $2^{12}$ | 6.723%        | 6.719%  | 6.711%  | 6.693%        |
| $2^{11}$ | 6.722%        | 6.718%  | 6.710%  | 6.989%        |
| $2^{10}$ | 6.718%        | 6.713%  | 6.704%  | 6.683%        |
| $2^9$    | 6.707%        | 6.702%  | 6.691%  | 6.671%        |

Table: 定理1の方法 (OTM2)

# モンテカルロシミュレーションに対するパス数の影響

Table: モンテカルロシミュレーションにより推定されたIVの統計量

| パス数       |      | 離散幅 (0.00024) |         |         |         |         |         |
|-----------|------|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|
|           |      | 数値例 (1)       |         |         | 数値例 (2) |         |         |
|           |      | ITM2          | ATM     | OTM2    | ITM2    | ATM     | OTM2    |
| 8,000,000 | 95%点 | 6.2728%       | 6.3273% | 6.3953% | 5.8622% | 6.3155% | 6.7286% |
|           | 5%点  | 6.2590%       | 6.3182% | 6.3874% | 5.8475% | 6.3045% | 6.7192% |
|           | 標準偏差 | 0.0046%       | 0.0032% | 0.0027% | 0.0041% | 0.0031% | 0.0027% |
| 4,000,000 | 95%点 | 6.2777%       | 6.3302% | 6.3973% | 5.8670% | 6.3183% | 6.7310% |
|           | 5%点  | 6.2546%       | 6.3147% | 6.3838% | 5.8445% | 6.3021% | 6.7169% |
|           | 標準偏差 | 0.0067%       | 0.0047% | 0.0038% | 0.0069% | 0.0050% | 0.0045% |
| 2,000,000 | 95%点 | 6.2815%       | 6.3341% | 6.3994% | 5.8708% | 6.3225% | 6.7356% |
|           | 5%点  | 6.2489%       | 6.3112% | 6.3818% | 5.8399% | 6.2981% | 6.7139% |
|           | 標準偏差 | 0.0094%       | 0.0065% | 0.0052% | 0.0101% | 0.0073% | 0.0063% |
| 1,000,000 | 95%点 | 6.2879%       | 6.3397% | 6.4043% | 5.8799% | 6.3271% | 6.7381% |
|           | 5%点  | 6.2455%       | 6.3095% | 6.3796% | 5.8312% | 6.2914% | 6.7085% |
|           | 標準偏差 | 0.0128%       | 0.0088% | 0.0072% | 0.0151% | 0.0109% | 0.0093% |

# 結果

今回の数値例においては、

- 時間の離散幅

- 定理 1 の方法 (Runge-Kutta 法) はモンテカルロシミュレーション (オイラー・丸山法) より影響が少ない

- モンテカルロシミュレーション

- パス数 8,000,000 本では、数値例 (1) と数値例 (2) は同程度の標準偏差
- パス数 8,000,000 本から減らす場合、数値例 (2) の標準偏差が数値例 (1) より大きい

## まとめ

- Willems (2021) に沿って O/N RFR 複利の場合における caplet の評価について整理  
⇒ フォワード中立化法を用いた backward looking caplet の評価
- Quasi-Gaussian モデルを定義⇒ 短期金利にアフィン構造を仮定  
⇒ backward looking caplet の評価を実施
- 定理 1 で見られるように caplet の価格式を、(16) 式で定義した関数  $\phi$  とそのフーリエ逆変換を用いて表現
- 2 通りで caplet を評価
  - 1 微分方程式を Runge-Kutta 法で解き、また、フーリエ逆変換を数値的に行う場合
  - 2 モデルに対しモンテカルロシミュレーションを実施した場合

## ■ 今後の発展

- 1 既存結果 (Willems (2021) など) と提案した方法を比較  
⇒ キャリブレーション能力について検討
- 2 計算の高速化
  - 定理 1 の方法  
⇒ 高速フーリエ変換や求積法
  - モンテカルロシミュレーション  
⇒ 分散減少法など
- 3 提案したモデルを用いて市場の価格情報からキャリブレーション  
⇒ 市場で直接観測できない金利オプションに対してクオートされる価格を補間
- 4 確率ボラティリティに拡張  
⇒ アフィン構造を仮定すれば、容易に拡張可能

## 参考文献

- Beyna, I. (2013) *Interest Rate Derivatives: Valuation, Calibration and Sensitivity Analysis*, Springer.
- Brace, A., Gatarek, D., and Musiela, M. (1997) "The Market Model of Interest Rate Dynamics," *Mathematical Finance*, **7**(2), 127–155.
- Duffie, D., Pan, J., and Singleton, K. (2000) "Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-diffusions," *Econometrica*, **68**(6), 1343–1376.
- Hagan, P. S., Kumar, D., Lesniewski, A., and Woodward, D. E. (2002) "Managing Smile Risk," *Wilmott Magazine*, **1**, 84–108.
- Hull, J. and White, A. (1990) "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities," *Review of Financial Studies*, **3**, 573–92.
- Lyashenko, A. and Mercurio, F. (2019) "Libor replacement: a modelling framework for in-arrears term rates," *Risk*, **32**(7), 72–77.
- Rebonato, R., McKay, K., and White, R. (2011) *The SABR/LIBOR Market Model: Pricing, Calibration and Hedging for Complex Interest-Rate Derivatives*, Wiley.
- Turfus, C. (2022) "Caplet Pricing with Backward-Looking Rates," *Wilmott*, **2022**(121), 106–109.
- Willems, S. (2021) "SABR smiles for RFR caplets," *Risk*, **34**(3), 72–77.
- 竹田凌 (2023) 「RFR 下における cap/floor の評価について」, ワーキングペーパー, 東京都立大学金融工学研究センター, [https://www.biz.tmu.ac.jp/quantitative-finance/wp-content/uploads/2023/01/paper\\_Takeda2023.pdf](https://www.biz.tmu.ac.jp/quantitative-finance/wp-content/uploads/2023/01/paper_Takeda2023.pdf).

## 補論 (問題設定)

### 定義 A.1 (フォワードレート)

時点  $t$  における将来時点  $s$  ( $t < s$ ) に対する瞬間的な利子率であるフォワードレートを以下で定義する。

$$f(t, s) := -\frac{\partial}{\partial s} \ln P(t, s) \quad (\text{A1})$$

ただし、現在の時点を  $t$  として、満期  $T$  ( $t \leq T$ ) において額面 1 単位の支払いを受けるゼロクーポン債券の価格を  $P(t, T)$  とする。

### 定義 A.2 (スポットレート)

スポットレート (短期金利)  $r_t$  を以下で定義する。

$$r_t := \lim_{s \rightarrow t} f(t, s) \quad (\text{A2})$$

## 補論 (問題設定)

### 定義 A.3 (リスク中立測度)

マネーマーケットアカウント  $B_t$  を以下で定義する。

$$B_t := \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) \quad (\text{A3})$$

時点  $t$  における証券価格  $S_t$  をマネーマーケットアカウントで割った相対価格を

$$S_t^* = \frac{S_t}{B_t} \quad (\text{A4})$$

とする。このとき、ある確率測度  $\mathbb{Q}$  に関して標準ブラウン運動  $W_t$  が存在し、ある確率過程  $\bar{\sigma}_t$  を用いて

$$\frac{dS_t^*}{S_t^*} = \bar{\sigma}_t dW_t \quad (\text{A5})$$

とかけることが知られている。このとき、確率測度  $\mathbb{Q}$  をリスク中立測度とよぶ。

## 補論 (問題設定)

### 定義 A.4 (フォワード中立確率)

時点  $t$  における、ある証券の価格を  $S_t$  とし、この証券をゼロクーポン債券で割った相対価格、すなわち満期  $T$  のフォワード価格を

$$S_t^T = \frac{S_t}{P(t, T)} \quad (\text{A6})$$

とする (ここで、任意の  $t > 0$  に対し、 $S_t > 0$  としておく)。このとき、ある確率測度  $\mathbb{Q}^T$  に関する標準ブラウン運動  $W_t^T$ 、ある確率過程  $\tilde{\sigma}_t$  が存在し、

$$\frac{dS_t^T}{S_t^T} = \tilde{\sigma}_t dW_t^T \quad (\text{A7})$$

とかけることが知られている。このとき、確率測度  $\mathbb{Q}^T$  を  $(T-)$  フォワード測度とよぶ。

## 補論 (短期金利アプローチ)

### 命題 A.5

関数  $G$  を以下のように定義する。

$$G_t(\beta; T, \alpha) := \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{\alpha l_{t,T}} \mathbf{1}_{\{l_{t,T} - \beta \geq 0\}} \right] \quad (\text{A8})$$

このとき、(7) 式は

$$V_{cpl}^b(t) = \frac{1}{\tau_1 - \tau_0} \left( \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-l_{t,\tau_0}} G_{\tau_0}(\tilde{k}; \tau_1, 0) \right] - \tilde{K} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-l_{t,\tau_0}} G_{\tau_0}(\tilde{k}; \tau_1, -1) \right] \right) \quad (\text{A9})$$

となる。

## 補論 (短期金利アプローチ)

証明

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{\tau_0} &= \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-l_{\tau_0, \tau_1}} \left( e^{l_{\tau_0, \tau_1}} - \tilde{K} \right)^+ \right] \\ &= \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-l_{\tau_0, \tau_1}} \left( e^{R_{\tau_0, \tau_1}} - \tilde{K} \right) \mathbf{1}_{\{e^{l_{\tau_0, \tau_1}} \geq \tilde{K}\}} \right]\end{aligned}$$

ここで、

$$\tilde{k} = \ln \tilde{K}$$

より、

$$\mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-l_{\tau_0, \tau_1}} \left( e^{l_{\tau_0, \tau_1}} - \tilde{K} \right) \mathbf{1}_{\{e^{l_{\tau_0, \tau_1}} \geq \tilde{K}\}} \right] = \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[ \mathbf{1}_{\{R_{\tau_0, \tau_1} \geq \tilde{k}\}} \right] - \tilde{K} \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-l_{\tau_0, \tau_1}} \mathbf{1}_{\{l_{\tau_0, \tau_1} \geq \tilde{k}\}} \right] \quad (\text{A10})$$

となる。

## 補論 (短期金利アプローチ)

関数  $G$  は

$$G_t(\beta; T, \alpha) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{\alpha R_{t,T}} \mathbf{1}_{\{l_{t,T} - \beta \geq 0\}} \right]$$

なので、(A10) 式は

$$\mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[ \mathbf{1}_{\{l_{\tau_0, \tau_1} \geq \tilde{k}\}} \right] - \tilde{K} \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-l_{\tau_0, \tau_1}} \mathbf{1}_{\{l_{\tau_0, \tau_1} \geq \tilde{k}\}} \right] = G_{\tau_0}(\tilde{k}; \tau_1, 0) - \tilde{K} G_{\tau_0}(\tilde{k}; \tau_1, -1) \quad (\text{A11})$$

とかける。以上より、

$$\begin{aligned} V_{cpl}^b(t) &= \frac{1}{\tau_1 - \tau_0} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-l_{t, \tau_0}} \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-l_{\tau_0, \tau_1}} \left( e^{l_{\tau_0, \tau_1}} - \tilde{K} \right)^+ \right] \right] \\ &= \frac{1}{\tau_1 - \tau_0} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-l_{t, \tau_1}} \tilde{V}_{\tau_0} \right] \\ &= \frac{1}{\tau_1 - \tau_0} \left( \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-l_{t, \tau_0}} G_{\tau_0}(\tilde{k}; \tau_1, 0) \right] - \tilde{K} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-l_{t, \tau_0}} G_{\tau_0}(\tilde{k}; \tau_1, -1) \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

を得る。□

## 補論 (短期金利アプローチ)

### 命題 A.6

関数  $G$  をフーリエ・スティルチェス変換し、

$$\hat{G}_t(\xi; T, \alpha) := \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\beta} \frac{d}{d\beta} G_t(\beta; T, \alpha) d\beta \quad (\text{A13})$$

とすると、 $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して、

$$\hat{G}_t(\xi; T, \alpha) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{(\alpha+i\xi)l_{t,T}} \right] \quad (\text{A14})$$

となる。

## 補論 (短期金利アプローチ)

証明

$$\begin{aligned}\hat{G}_t(\xi; T, \alpha) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\beta} \frac{d}{d\beta} G_t(\beta; T, \alpha) d\beta \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\beta} \frac{d}{d\beta} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{\alpha l_{t,T}} \mathbf{1}_{\{l_{t,T} - \beta \geq 0\}} \right] d\beta \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\beta} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{\alpha l_{t,T}} \frac{d}{d\beta} \mathbf{1}_{\{l_{t,T} - \beta \geq 0\}} \right] d\beta \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\beta} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{\alpha l_{t,T}} \delta(l_{t,T} - \beta) \right] d\beta\end{aligned}$$

## 補論 (短期金利アプローチ)

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{\alpha l_{t,T}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\beta} \delta(l_{t,T} - \beta) d\beta \right] \\ &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{\alpha l_{t,T}} e^{i\xi l_{t,T}} \right] \\ &= \mathbb{E}_t \left[ e^{(\alpha+i\xi)l_{t,T}} \right] \end{aligned}$$

より題意が示される。□

## 補論 (短期金利アプローチ)

### 定義 A.7

関数  $\hat{G}_t(\xi; T, \alpha)$  を一般化するため以下を定義する。

$$\bar{G}_t(\zeta; T) := \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[e^{\zeta I_{t,T}}] \quad (\text{A15})$$

ただし、 $\zeta \in \mathbb{C}$  とする。

このとき、 $\zeta = \alpha + i\xi$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) とすれば、

$$\bar{G}_t(\zeta; T) = \hat{G}_t(\xi; T, \alpha) \quad (\text{A16})$$

をみたま。 (A15) 式は

$$\begin{aligned} \bar{G}_t(\zeta; T) &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[e^{\zeta I_{t,T}}] \\ &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[e^{\zeta \int_t^T (f(0,s) + x_s) ds}] \end{aligned} \quad (\text{A17})$$

## 補論 (短期金利アプローチ)

(6) 式で短期金利にアフィン構造を仮定していることより、

$$\begin{aligned}\bar{G}_t(\zeta; T) &= \exp(A(t, T; \zeta)x_t + B(t, T; \zeta)y_t + C(t, T; \zeta)) \\ &=: \psi(\zeta, x_t, y_t, t, T)\end{aligned}\tag{A18}$$

とかける。ただし、 $A(t, T; \zeta)$ ,  $B(t, T; \zeta)$ ,  $C(t, T; \zeta)$  は確定的関数。

関数  $G$  は関数  $\hat{G}$  をフーリエ逆変換し積分すれば求まるので、(A13) 式、(A18) 式より

$$\begin{aligned}G_t(\beta; T, \alpha) &= \int_{-\infty}^{\beta} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi\gamma} \hat{G}(\xi; T, \alpha) d\xi \right) d\gamma \\ &=: \hat{\mathcal{F}}^{-1}(\psi(\alpha + i\xi, x_t, y_t, t, T))(\beta)\end{aligned}\tag{A19}$$

## 補論 (短期金利アプローチ)

これらの結果を (A9) 式

$$V_{cpl}^b(t) = \left( \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-I_{t,\tau_0}} G_{\tau_0}(\tilde{k}; \tau_1, 0) \right] - \tilde{K} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-I_{t,\tau_0}} G_{\tau_0}(\tilde{k}; \tau_1, -1) \right] \right) \quad (\text{A20})$$

に代入して caplet 価格を評価するために関数  $H$  を定義する。

### 定義 A.8

$$H_t(s, T; \alpha, \beta) := \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-I_{t,s}} G_s(\beta; T, \alpha) \right] \quad (\text{A21})$$

ただし、 $t \leq s$  とする。

## 補論 (短期金利アプローチ)

このとき、関数  $H$  は (A19) 式より、

$$H_t(s, T; \alpha, \beta) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-l_{t,s}} \hat{\mathcal{F}}^{-1}(\psi(\alpha + i\xi, x_s, y_s, s, T))(\beta) \right] \quad (\text{A22})$$

とかける。なお、作用素  $\hat{\mathcal{F}}^{-1}$  は実数倍に対し線形であることに注意すれば、

$$H_t(s, T; \alpha, \beta) = \hat{\mathcal{F}}^{-1}(\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-l_{t,s}} \psi(\alpha + i\xi, x_s, y_s, s, T)(\beta) \right]) \quad (\text{A23})$$

となる。(A18) 式より

$$\begin{aligned} H_t(s, T; \alpha, \beta) &= \hat{\mathcal{F}}^{-1} \left( \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-l_{t,s}} \psi(\alpha + i\xi, x_s, y_s, s, T) \right] \right) (\beta) \\ &= \hat{\mathcal{F}}^{-1} \left( \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \exp(-l_{t,s} + ax_s + by_s + c) \Big|_{a=A(s,T;\alpha+i\xi), b=B(s,T;\alpha+i\xi), c=C(s,T;\alpha+i\xi)} \right] \right) (\beta) \end{aligned} \quad (\text{A24})$$

となる。

## 補論 (短期金利アプローチ)

短期金利にアフィン構造を仮定しているので、(A18) 式と同様に、

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[e^{ax_s+by_s+c+dR_{t,s}}] &= \exp(\tilde{A}(t,s;a,b,c,d)x_t + \tilde{B}(t,s;a,b,c,d)y_t \\ &\quad + \tilde{C}(t,s;a,b,c,d) + \tilde{D}(t,s;a,b,c,d)I_{t,t}) \\ &= \exp(\tilde{A}(t,s;a,b,c,d)x_t + \tilde{B}(t,s;a,b,c,d)y_t + \tilde{C}(t,s;a,b,c,d)) \\ &=: \phi(a,b,c,d,x_t,y_t,t,s)\end{aligned}\tag{A25}$$

とかける。ただし、 $\tilde{A}(t,s;a,b,c,d)$ ,  $\tilde{B}(t,s;a,b,c,d)$ ,  $\tilde{C}(t,s;a,b,c,d)$ ,  $\tilde{D}(t,s;a,b,c,d)$  は確定的関数であり、また、 $I_{t,t} = 0$  を用いた。

## 補論 (短期金利アプローチ)

よって、(A24) 式、(16) 式より

$$H_t(s, T; \alpha, \beta) = \hat{\mathcal{F}}^{-1} \left( \phi(a, b, c, d, x_t, y_t, t, s)_{a=A(s, T; \alpha+i\xi), b=B(s, T; \alpha+i\xi), c=C(s, T; \alpha+i\xi)} \right) (\beta) \quad (\text{A26})$$

となる。

## 補論 (短期金利アプローチ)

### 注意 A.9

- 確定的ボラティリティ：(4)式におけるボラティリティ $\sigma_r(t, x, y, \omega)$ が、 $t$ にのみ依存する場合 ( $\sigma_r(t)$ の場合)  
⇒ Gaussian 短期金利モデルとよばれる。
- 確率ボラティリティ：ボラティリティ $\sigma_r(t, x, y, \omega)$ が、 $t$ と $\omega$ にのみ依存する場合 ( $\sigma_r(t, \omega)$ の場合)
- 局所確率ボラティリティ：ボラティリティ $\sigma_r(t, x, y, \omega)$ が、 $t, x, y, \omega$ のすべてに依存する場合

## 補論 (短期金利アプローチ)

関数  $\psi$  を一般化した関数が関数  $\phi$  であるので、関数  $\phi$  を求めれば十分。  
関数  $\psi$  は、(A15) 式、(A18) 式より、

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[e^{\zeta l_{t,T}}] &= \psi(\zeta, x_t, y_t, t, T) \\ &= \exp(A(t, T; \zeta)x_t + B(t, T; \zeta)y_t + C(t, T; \zeta))\end{aligned}\tag{A27}$$

であり、関数  $\phi$  は (16) 式より、

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[e^{ax_s + by_s + c + dl_{t,s}}] &= \phi(a, b, c, d, x_t, y_t, t, s) \\ &= \exp(\tilde{A}(t, s; a, b, c, d)x_t + \tilde{B}(t, s; a, b, c, d)y_t + \tilde{C}(t, s; a, b, c, d))\end{aligned}\tag{A28}$$

であった。(A27) 式と (A28) 式より、(A28) 式の左辺において、 $a = b = c = 0$  かつ  $d = \zeta$  の場合が (A27) 式の左辺と一致する。よって、関数  $\phi$  を求めれば十分であることが示せた。

## 補論 (数値検証)

- 左図：3 か月と 6 か月の JGB クーポンレートを使用し、線形補間
- 右図：3 か月と 6 か月の JGB クーポンレートを使用し、債券価格を算出後に線形補間
- 定義 A.1 より  $f(t, s) := -\frac{\partial}{\partial s} \ln P(t, s)$

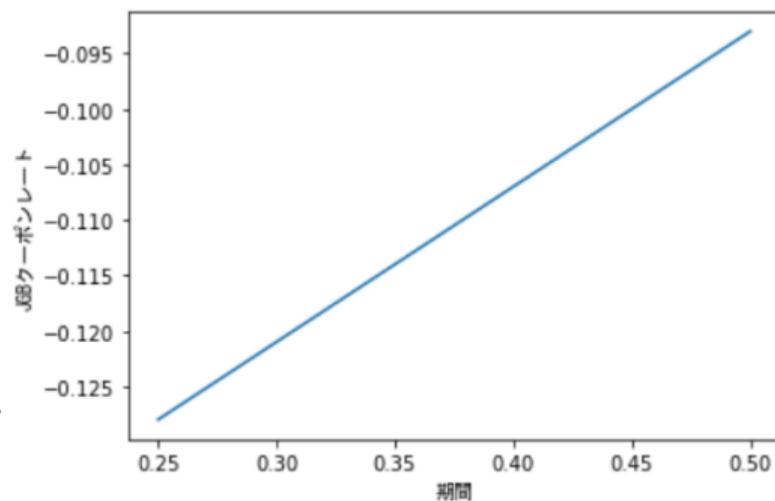


Figure: 3 か月から 6 か月の JGB クーポンレート

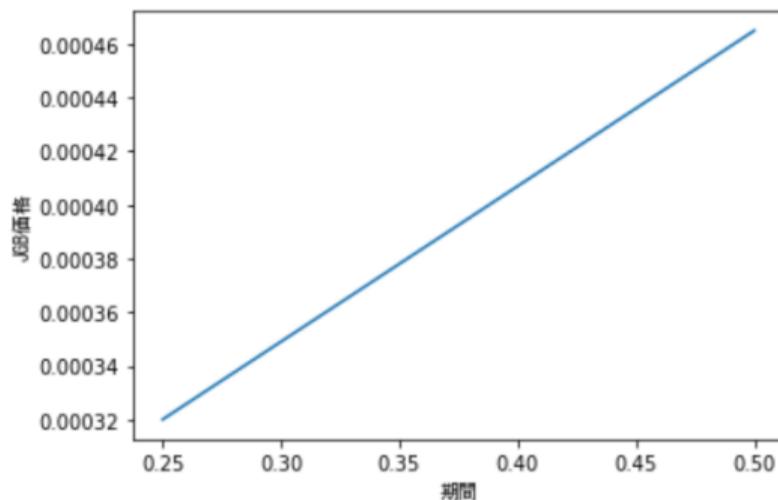


Figure: 3 か月から 6 か月の JGB 価格

## 補論 (数値検証)

一般的に利用される 4 次の Runge-Kutta 法とは、以下で知られている。

### 4 次のルンゲ・クッタ公式

$f$  を  $x, y$  の関数とする。このとき、

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (\text{A29})$$

となる微分方程式を考える。次に、

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \quad (\text{A30})$$

とする。ただし、 $x_{n+1} = x_n + h$  とする。この  $k_1$  を使用し、

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (\text{A31})$$

## 補論 (数値検証)

### 4 次のルンゲ・クッタ公式

また、この  $k_2$  を使用し、

$$k_2 = hf \left( x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2} \right) \quad (\text{A32})$$

さらに、この  $k_3$  を使用し、

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \quad (\text{A33})$$

とする。これらを用いて、以下で与えられる式で微分方程式の初期値問題を解く方法を4次のRunge-Kutta法とよぶ。

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (\text{A34})$$

## 補論 (数値検証)

Runge-Kutta 法は初期値問題を解く方法であるため、初期値問題として解けるよう関数  $\tilde{A}(t, s; a, b, c, d)$ ,  $\tilde{B}(t, s; a, b, c, d)$ ,  $\tilde{C}(t, s; a, b, c, d)$  を以下のように置換した。

$$\begin{aligned}\hat{A}(s - t, s; a, b, c, d) &= \tilde{A}(t, s; a, b, c, d) \\ \hat{B}(s - t, s; a, b, c, d) &= \tilde{B}(t, s; a, b, c, d) \\ \hat{C}(s - t, s; a, b, c, d) &= \tilde{C}(t, s; a, b, c, d)\end{aligned}\tag{A35}$$

すると、初期条件は

$$\begin{aligned}\hat{A}(0, s; a, b, c, d) &= a \\ \hat{B}(0, s; a, b, c, d) &= b \\ \hat{C}(0, s; a, b, c, d) &= c\end{aligned}\tag{A36}$$

となる。

## 補論 (数値検証)

上記の置換に合わせて関数  $g_0(t)$ ,  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$ ,  $f(0, t)$  も同様に以下のように置換した。

$$\begin{aligned}\hat{g}_0(s - t) &= g_0(t) \\ \hat{g}_1(s - t) &= g_1(t) \\ \hat{g}_2(s - t) &= g_2(t) \\ \hat{f}(0, s - t) &= f(t)\end{aligned}\tag{A37}$$

## 補論 (数値検証)

4 次の Runge-Kutta 法で解く。まず、関数  $\hat{A}$  を解く。

$$Ak_1 = h \left( -\kappa(s - t_n) \hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \hat{g}_1(s - t_n) \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \hat{g}_1(s - t_n) \hat{A}^2(s - t_n, s; a, b, c, d) + d \right)$$

$$Ak_2 = h \left( -\kappa \left( s - \left( t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left( \hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Ak_1}{2} \right) \right. \\ \left. + \hat{g}_1 \left( s - \left( t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left( \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Bk_1}{2} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \hat{g}_1 \left( s - \left( t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left( \hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Ak_1}{2} \right)^2 + d \right)$$

## 補論 (数値検証)

$$\begin{aligned} Ak_3 &= h \left( -\kappa \left( s - \left( t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \right) \left( \hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Ak_2}{2} \right) \\ &\quad + \hat{g}_1 \left( s - \left( t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left( \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Bk_2}{2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \hat{g}_1 \left( s - \left( t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left( \hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Ak_2}{2} \right)^2 + d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ak_4 &= h \left( -\kappa(s - (t_n + h)) \right) \left( \hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + Ak_3 \right) \\ &\quad + \hat{g}_1(s - (t_n + h)) \left( \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + Bk_3 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \hat{g}_1(s - (t_n + h)) \left( \hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + Ak_3 \right)^2 + d \end{aligned}$$

$$\hat{A}(s - t_{n+1}, s; a, b, c, d) = \hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{1}{6}(Ak_1 + 2Ak_2 + 2Ak_3 + Ak_4)$$

## 補論 (数値検証)

次に、関数  $\hat{B}$  を解く。

$$\begin{aligned} Bk_1 &= h \left( \hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \hat{g}_2(s - t_n) \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) \right. \\ &\quad \left. - 2\kappa(s - t_n) \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{1}{2} \hat{g}_2(s - t_n) \hat{A}^2(s - t_n, s; a, b, c, d) \right) \\ Bk_2 &= h \left( \left( \hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Ak_1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \hat{g}_2 \left( s - \left( t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left( \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Bk_1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2\kappa \left( s - \left( t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left( \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Bk_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \hat{g}_2 \left( s - \left( t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \right) \\ &\quad \times \left( \hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Ak_1}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

## 補論 (数値検証)

$$\begin{aligned} Bk_3 = & h \left( \left( \hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Ak_2}{2} \right) \right. \\ & + \hat{g}_2 \left( s - \left( t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left( \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Bk_2}{2} \right) \\ & - 2\kappa \left( s - \left( t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left( \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Bk_2}{2} \right) + \frac{1}{2} \hat{g}_2 \left( s - \left( t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \\ & \left. \times \left( \hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Ak_2}{2} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Bk_4 = & h \left( \left( \hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + Ak_3 \right) + \hat{g}_2(s - (t_n + h)) \left( \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + Bk_3 \right) \right. \\ & \left. - 2\kappa(s - (t_n + h)) \left( \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + Bk_3 \right) + \frac{1}{2} \hat{g}_2(s - (t_n + h)) \left( \hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + Ak_3 \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\hat{B}(s - t_{n+1}, s; a, b, c, d) = \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{1}{6} (Bk_1 + 2Bk_2 + 2Bk_3 + Bk_4)$$

## 補論 (数値検証)

最後に関数  $\hat{C}$  を以下の通り解く。

$$Ck_1 = h \left( \hat{g}_0(s - t_n) \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{1}{2} \hat{g}_0(s - t_n) \hat{A}^2(s - t_n, s; a, b, c, d) + d\hat{f}(0, s - t) \right)$$

$$Ck_2 = h \left( \hat{g}_0 \left( s - \left( t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left( \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Bk_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \hat{g}_0 \left( s - \left( t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \right. \\ \left. \times \left( \hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Ak_1}{2} \right)^2 + d\hat{f} \left( 0, s - \left( t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \right)$$

$$Ck_3 = h \left( \hat{g}_0 \left( s - \left( t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left( \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Bk_2}{2} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \hat{g}_0 \left( s - \left( t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left( \hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Ak_2}{2} \right)^2 + d\hat{f} \left( 0, s - \left( t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \right)$$

## 補論 (数値検証)

$$\begin{aligned} Ck_4 &= h \left( \hat{g}_0(s - (t_n + h)) \left( \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + Bk_3 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \hat{g}_0(s - (t_n + h)) \left( \hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + Ak_3 \right)^2 + d\hat{f}(0, s - (t_n + h)) \right) \\ \hat{C}(s - t_{n+1}, s; a, b, c, d) &= \hat{C}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{1}{6}(Ck_1 + 2Ck_2 + 2Ck_3 + Ck_4) \end{aligned}$$

ただし、上記はいずれも  $t_{n+1} = t_n - h, t_0 = t$  とした。