

アメリカンオプションに対する  
**Deep Hedging** の学習方法に関する考察  
Consideration of Deep Hedging  
Learning Methods for American Options

佐久間達也

東京都立大学大学院 経営学研究科 経営学専攻 博士前期課程

2023年3月11日

# 目次

- ① 概要
- ② 市場の設定・非完備市場でのヘッジの説明
- ③ 新たな学習手法の提案
- ④ 検証
- ⑤ 結論
- ⑥ 参考文献

# 概要

- 研究対象
  - ▶ 非完備市場における最適なヘッジ戦略の深層学習を用いた導出.
  - ▶ 特にバミューダン（アメリカン）オプションに対する適用.
- 問題
  - ▶ 早期行使が起きることでサンプルごとに PL の評価時点が異なる.
  - ▶ 満期に近いニューラルネット（NN）の学習精度に影響が出る可能性がある.
- 対策
  - ▶ ヨーロピアンオプションに対するヘッジ戦略を基準点として計算を行う.
  - ▶ 探索範囲を小さくする事により、学習精度への悪影響を小さくできる.

# 市場の設定・記号の説明

- 満期  $T$  までに  $N$  回行使機会があるバミューダンオプションを考える。
- ヘッジポートフォリオのリバランスを行使可能時点間で  $M$  回行う。
- $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{NM-1} < t_{NM} = T$  : 取引時刻 (等間隔な離散時刻)
- $\Delta t := T/(NM)$  : 離散時刻の分割幅 (すなわち  $t_k = k\Delta t$ )
- $\mathbb{T} := \{t_0, t_1, \dots, t_{NM}\}$  : (リバランス可能な) 時刻の集合
- $\mathbb{T}' := \{t_0, t_M, \dots, t_{NM}\}$  : 行使可能な時刻の集合
- $\mathcal{T} := \{\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{T}' ; (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}'}\text{-停止時刻}\}$  : 停止時刻全体の集合
- $\mathcal{T}_t := \{\tau \in \mathcal{T} ; t \leq \tau\}$ ,  $t \in \mathbb{T}'$  : 時点  $t$  以上である停止時刻全体の集合
- 無リスク金利 :  $r \in \mathbb{R}$
- オプションの原資産 :  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ -適度な  $\mathbb{R}^d$ -値マルコフ過程  $S = (S_t)_{t \in \mathbb{T}}$
- オプションのペイオフ関数 :  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

## バミューダンオプション

- 時点  $t$  におけるバミューダンオプションの価値  $V_t$  :

$$V_t := \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(\tau-t)} g(S_\tau) \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.1)$$

- 式 (2.1) の上限を達成する  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}'}$ -停止時刻の列  $(\tau_t^*)_{t \in \mathbb{T}'}$  :

$$\tau_t^* = \begin{cases} T & t = T, \\ \min\{\tau \in \mathcal{T}_t; g(S_t) \geq C_t(S_t)\} & t \in \mathbb{T}' \setminus \{0, T\}, \\ \tau_{t_M}^* & t = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

- $C_t(s) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rM\Delta t} V_{t+M\Delta t} \mid S_t = s]$  は継続価値関数である.
- 時刻 0 で売却されたオプションは時刻  $\tau_0^*$  で行使されると仮定する.

- ヘッジ戦略： $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ -適度な  $\mathbb{R}^d$ -値確率過程  $\delta = (\delta_t)_{t \in \mathbb{T}}$

## Profit and Loss (PL)

ヘッジポートフォリオの損益 (PL) を以下で定義する：

$$\text{PL} := (\text{売却価格}) - (\text{割引ペイオフ}) + (\text{割引累積収益})^{*1} - (\text{割引累積取引コスト})$$

$$\text{PL}(v_0, \delta, S)_t := v_0 - e^{-rt}g(S_t) + (\delta \cdot S)_t - \Lambda(\delta, S)_t, \quad t \in \mathbb{T}', \quad (2.3)$$

$$(\delta \cdot S)_t := \sum_{i=1}^d \sum_{k=0}^{\frac{t}{\Delta t} - 1} \delta_{t_k}^i (e^{-rt_{k+1}} S_{t_{k+1}}^i - e^{-rt_k} S_{t_k}^i),$$

$$\Lambda(\delta, S)_t := \sum_{i=1}^d \sum_{k=0}^{\frac{t}{\Delta t}} e^{-rt_k} \lambda^i (|\delta_{t_k}^i - \delta_{t_{k-1}}^i|, S_{t_k}^i).$$

ここで  $\lambda^i : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, d\}$  はコスト関数,  $\delta_{-1} \equiv 0$ .

\*1 配当がある場合は即座に原資産に再投資されると仮定する。

## 非完備市場におけるヘッジ

- 非完備市場では最適なヘッジ戦略は一意に定まらない。
- 一般には効用を表す関数などの評価指標のもとで、最適なヘッジを定める (Xu [2006], Arai [2014] など) .

### 非完備市場における、ヨーロピアンオプションに対する最適なヘッジ

評価指標  $\rho$  のもとでの、ヨーロピアンオプションに対する最適なヘッジ戦略を以下を達成する  $\delta^*$  とする：

$$\inf_{\delta \in \mathcal{H}} \rho(\text{PL}(V_0^E, \delta, S)_T). \quad (2.4)$$

ここで  $V_0^E$  : ヨーロピアンオプションの売却価格,  $\rho : \{\mathbb{R}\text{-値の確率変数}\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{H}$  : ヘッジ戦略全体の集合. ただし  $\delta_T \equiv 0$  とする.

# Deep Hedging (Buehler et al. [2019])

## Deep Hedging

- $\Theta$  : パラメーターの集合
- $f^{\theta_t}$  :  $\theta_t \in \Theta$  をパラメーターとする NN
- ヘッジ戦略を NN の出力  $\delta^{\theta^E}$  とし, 最適化問題 (2.4) を以下の最適な NN のパラメーター  $\theta^{E,*}$  を求める問題へと置き換える :

$$\inf_{\theta^E \in \Theta^{NM}} \rho(\text{PL}(V_0^E, \delta^{\theta^E}, S)_T). \quad (2.5)$$

ただし  $\delta_T^{\theta^E} \equiv 0$  とする.

## ニューラルネットワークの分類

NN は市場情報  $I_t$  を共通の入力とし, NN の構造や, 入力するデータで以下のように分類される.

- **Simple Feed-Forward NN (FF)** :  $\delta_t^\theta = f^{\theta_t}(I_t)$
- **Full-recurrent NN (Full)** :  $\delta_t^\theta = f^{\theta_0}(I_t, (T-t)/T, \delta_{t-\Delta t}^\theta)$
- **Semi-recurrent NN (Semi)** :  $\delta_t^\theta = f^{\theta_t}(I_t, \delta_{t-\Delta t}^\theta)$



# バミューダンオプションへの応用

Becker et al. [2020]

- バミューダン（アメリカン）オプションに対して、NN でヘッジ戦略を計算する手法を適用するため、Buehler et al. [2019] とは異なる学習方法を提案している。
- NN は行使可能時点間  $[t_{(n-1)M}, t_{nM}]$  毎に次の平均二乗誤差を最小化するように学習する：

$$\inf_{\theta_{t_{(n-1)M}}, \dots, \theta_{t_{nM-1}}} \in \Theta \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \sum_{i=1}^d \sum_{k=(n-1)M}^{nM-1} f^{\theta_{t_k}}(S_{t_k}) (e^{-rt_{k+1}} S_{t_{k+1}}^i - e^{-rt_k} S_{t_k}^i) + e^{-rt_{(n-1)M}} C_{t_{(n-1)M}}(S_{t_{(n-1)M}}) - e^{-rt_{nM}} \max(g(S_{t_{nM}}), C_{t_n}(S_{t_{nM}})) \right)^2 \right]. \quad (3.1)$$

- 彼らの学習手法では**回帰構造のある NN（Full や Semi）が使用できない**。

# One-Step Learning (1S)

Buehler et al. [2019] の Deep Hedging における学習方法を直接バミューダンオプションに適用する学習方法.

## 学習の流れ (1S)

- 1 バミューダンオプションの売却価格  $V_0^B$  と, 停止時刻  $\hat{\tau}_0^*$  を決定する.
- 2 各サンプルで  $\hat{\tau}_0^*$  における PL を計算し, NN の学習 \*2 を行うことで, 以下を達成するパラメーター  $\theta^{B,*}$  を推定する:

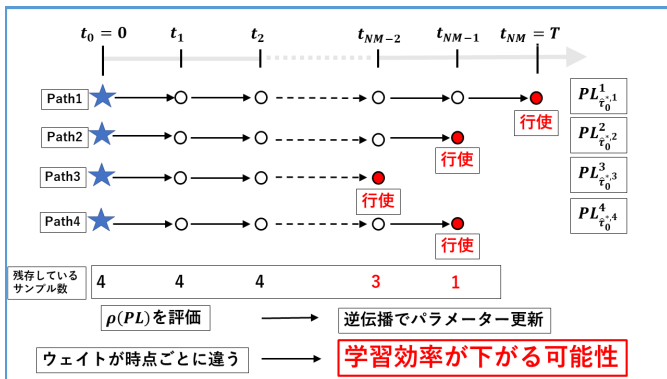
$$\inf_{\theta^B \in \Theta^{NM}} \rho(\text{PL}(V_0^B, \delta^{\theta^B}, S)_{\hat{\tau}_0^*}). \quad (3.2)$$

ただし  $\delta_t^{\theta^B} = 0, t \geq \hat{\tau}_0^*$  とする.

\*2 具体的な学習方法については, 佐久間 [2023] を参照されたい.

## One-Step Learning の課題

- サンプルごとに行使時点が異なるため、満期に近い時点ほど行使されていないサンプルの数は減る。
- NN を学習する際、満期に近い時点の NN ほど、少ない数のサンプルで学習しなければならず、効果的な学習ができない可能性がある。



## Two-steps Learning (2S)

バミューダンオプションの最適なヘッジ戦略  $\delta^{\theta^{B,*}}$  を,

- ①  $\delta^{\theta^{E,*}}$  : 満期とペイオフが同じヨーロピアンオプションの最適なヘッジ戦略
- ②  $\delta^{\theta^{B-E,*}}$  : 補正分

の和で表現して, 二段階に分けて学習する方法.

### 学習の流れ (2S)

- ① ヨーロピアンオプションに対する PL を計算し, NN の学習を行うことで, 以下を達成するパラメーター  $\theta^{E,*}$  を推定する:

$$\inf_{\theta^E \in \Theta^{NM}} \rho(\text{PL}(V_0^E, \delta^{\theta^E}, S)_T). \quad (3.3)$$

- ② 以下の新たな最適化問題を達成するパラメーター  $\theta^{B-E,*}$  を推定する:

$$\inf_{\theta^{B-E} \in \Theta^{NM}} \rho(\text{PL}(V_0^B, \delta^{\theta^{E,*}} + \delta^{\theta^{B-E,*}}, S)_{\hat{\tau}_0^*}). \quad (3.4)$$

- ③ バミューダンオプションの最適なヘッジ戦略は  $\delta^{\theta^{B,*}} = \delta^{\theta^{E,*}} + \delta^{\theta^{B-E,*}}$  となる \*3.

\*3 ヘッジ戦略全体の集合  $\mathcal{H}$  は和について閉じていると仮定する.

## 二段階学習 ( $\delta^{\theta^{B,*}} = \delta^{\theta^{E,*}} + \delta^{\theta^{B-E,*}}$ ) を採用する理由

- バミューダンオプションの最適なヘッジ戦略はヨーロピアンオプションの最適なヘッジ戦略に近い可能性がある。
- $\theta^{E,*}$  の推定には Buehler et al. [2019] の手法を採用しており、優れた精度で推定が可能である場合が多い。
- $\theta^{B-E,*}$  は 1S と同様に学習効率に懸念があるが、 $\theta^{E,*}$  の推定に比重をかけることができるため、1S に比べて精度が落ちにくいことが期待できる。

# 検証

## モデルの設定

- 権利行使価格  $K$  のバミューダン Max コールオプションを想定する：

$$g(s) := \max \left\{ \max_{i \in \{1, 2, \dots, d\}} s^i - K, 0 \right\}, \quad s \in \mathbb{R}^d.$$

- オプションの原資産価格は以下で定義される確率過程に従うと仮定する：

$$S_t^i = S_{t-\Delta t}^i \exp \left\{ \left( r - q - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \right) \Delta t + \tilde{\sigma} Z_t^i \sqrt{\Delta t} \right\}, \quad i \in \{1, 2, \dots, d\}, t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}.$$

ただし、初期原資産価格は定数  $S_0 \in (0, \infty)^d$  とし、 $Z_{t_1}, Z_{t_2}, \dots, Z_T$  は  $\mathbb{Q}$  に関して  $d$  次元標準正規分布に従う独立同分布な  $\mathbb{R}^d$ -値確率変数列とする。また、 $q \in \mathbb{R}$  は配当率、 $\tilde{\sigma} > 0$  は原資産価格のボラティリティとする。

- コスト率  $\varepsilon^i > 0$  に対して、コスト関数  $\lambda^i$  を以下で定義する：

$$\lambda^i(x, s) := \varepsilon^i |x| s, \quad (x, s) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \quad i \in \{1, 2, \dots, d\}.$$

## NN の入力

- 1S で使用する NN の構造は FF, Full, Semi の三種類であり、  
入力する市場情報  $I_t$  は以下のように設定する：

$$I_t = \left( \ln(e^{-(r-q)t} S_t), \max_{i \in \{1, 2, \dots, d\}} S_t^i / K \right).$$

- 2S の一段回目で使用する NN の構造は Full, Semi の二種類であり、  
入力する市場情報  $I_t$  は以下のように設定する：

$$I_t = \left( \ln(e^{-(r-q)t} S_t) \right).$$

- 2S の二段回目で使用する NN の構造は Full の一種類であり、  
入力する市場情報  $I_t$  は以下のように設定する：

$$I_t = \left( \ln(e^{-(r-q)t} S_t), \max_{i \in \{1, 2, \dots, d\}} S_t^i / K, \delta_t^{\hat{\theta}^{E,*}} \right).$$

ここで  $\delta_t^{\hat{\theta}^{E,*}}$  は一段回目で学習済みの NN の出力である。

## 活性化関数・評価指標

- NN の活性化関数は ReLU 関数を採用している :

$$\text{ReLU}(x) = \max(x, 0).$$

- 評価指標  $\rho$  は以下の 2 つを採用している :  $\mathbb{R}$ -値確率変数  $X$  に対して,

- ▶ 平均二乗誤差 (MSE) :

$$\rho(X) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X^2].$$

- ▶  $\text{CVaR}_{\alpha}$  (Conditional Value at Risk) : パーセント点  $\alpha \in [0, 1)$  に対して,

$$\rho(X) = \text{CVaR}_{\alpha}(X) := \frac{1}{1-\alpha} \int_0^{1-\alpha} \text{VaR}_{\gamma}(X) d\gamma.$$

ここで  $\text{VaR}_{\gamma}(X) := \inf\{m \in \mathbb{R}; \mathbb{Q}(X < -m) \leq \gamma\}$ .



## 検証 1 : 5 次元 (バミューダン Max コールオプション)

- 満期 :  $T = 1/4$ ,  $N = 10$ ,  $M = 3$ , 行使価格 :  $K = 100$
- オプションの原資産価格のパラメーター :  
$$S_0^i = 100, i \in \{1, 2, \dots, 5\}, r = 0.05, q = 0.1, \tilde{\sigma} = 0.2$$
- コスト率 :  $\varepsilon^i = 0.005, i \in \{1, 2, \dots, 5\}$
  
- 継続価値関数の推定<sup>\*4</sup> に使用するサンプルの数 :  $2 \times 10^5$
- $V_0^E$  と  $V_0^B$  の推定に使用する各々のサンプルの数 :  $10^5$
  
- NN のレイヤーの数 : 3, NN のノードの数 : 60
- NN の学習に使用するサンプルの数 :  $10^5$
- エポック数 : 1000 回
- 学習率 :  $\eta^B = \eta^E = 0.005$ ,  $\eta^{B-E} = 0.001$ , バッチサイズ : 500
- 評価に使用するサンプルの数 :  $5 \times 10^4$

<sup>\*4</sup> 継続価値関数の推定には Longstaff and Schwartz [2001] の最小二乗モンテカルロ法を使用。

## 取引コストのないケース

Table: 5次元 (バミューダン Max コールオプション), 取引コストなし

統計量 \ 評価指標	MSE					参考値	
	1S-FF	1S-Semi	1S-Full	2S-Semi	2S-Full	デルタヘッジ	ヘッジなし
NN 型							
平均	0.008	0.008	0.010	0.005	0.005	0.107	0.000
標準偏差	2.181	1.806	1.237	1.281	1.201	1.553	6.463
-CVaR <sub>0.95</sub>	-4.884	-3.933	-2.676	-2.873	-2.711	-3.668	-14.025
MSE	4.755	3.263	1.531	1.641	1.441	2.423	41.767

- 表の数値は各サンプルの時点  $t_0^*$  で行使された際における PL の値に対する各種統計量。
- デルタヘッジは時点 0 におけるデルタを Modified LSM (MLSM) 法 (Wang and Caflisch [2009]) で計算し, それ以外の時点におけるデルタを継続価値関数の近似の微分により求めた結果。
- ヘッジなしは初期原資産価格と行使された時刻における割引済みペイオフの差。
- 取引コストがないケースでは, 理論上連続的なりバランスを行うことで, 完全なヘッジが可能である。そのため, 1S と 2S は評価指標を MSE とした結果のみを掲載している。

## 取引コストのあるケース

Table: 5次元（バミューダンコールオプション），取引コストあり

統計量 \ 評価指標	MSE				
	1S-FF	1S-Semi	1S-Full	2S-Semi	2S-Full
NN_type					
平均	-2.089	-1.710	-1.643	-1.709	-1.686
標準偏差	2.316	2.184	1.946	1.878	1.815
-CVaR <sub>0.95</sub>	-7.335	-6.481	-5.847	-5.899	-5.746
MSE	9.727	7.692	6.487	6.447	6.135

統計量 \ 評価指標	CVaR <sub>0.95</sub>				
	1S-FF	1S-Semi	1S-Full	2S-Semi	2S-Full
NN_type					
平均	-2.605	-1.953	-2.077	-2.194	-2.137
標準偏差	2.652	2.575	1.989	1.733	1.620
-CVaR <sub>0.95</sub>	-7.925	-7.285	-6.365	-5.676	-5.361
MSE	13.820	10.443	8.268	7.815	7.188

## 検証 2

### 時間効率の分析

- 時間効率を加味すると、二段階学習である 2S は 1S に劣る可能性がある。
- 検証 2 では 1S のエポック数と、2S の合計のエポック数を 1000 に合わせ、終了までに要した時間と損失関数の減少具合を分析する。
- 2S の一段階目と二段階目のエポック数の比率を変化させて検証する。
- 各パラメーターは検証 1 と同様とする。

## 結果

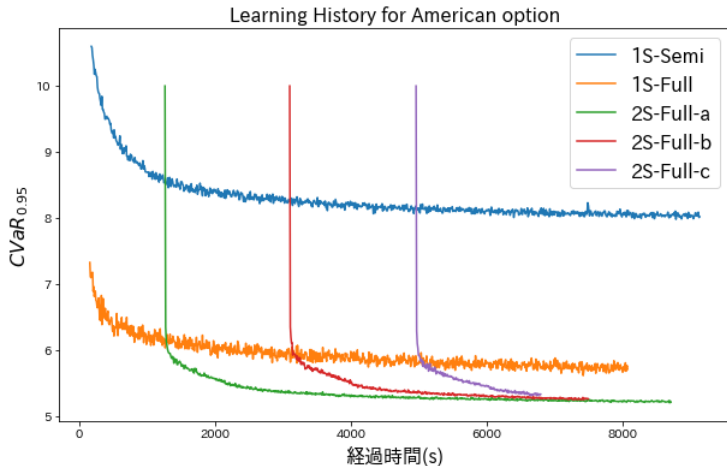


Figure 1. 2S-Full は 1 段階目の学習が終了した時点からプロットしている.  
 2S の一段階目と二段階目のエポック数の比率は, a-200:800, b-500:500, c-800:200.

# 結論

- 検証結果の考察
  - ▶ 1S と 2S はデルタヘッジに比べて高いパフォーマンスを示した。
  - ▶ 2S は 1S と同等以上のパフォーマンスを示した。
  - ▶ 原資産の次元数を増やした場合、1S が十分に学習ができなかったのに対して、2S はうまく学習をできており、学習方法として 2S の優位性が示唆された。
  - ▶ 2S が時間効率の観点でも 1S より優れていることが示唆された。
- 今後の展望
  - ▶ 原資産以外をヘッジ資産とした場合での有効性を検証する。
  - ▶ パス依存性のあるオプションに対する有効性を検証する。

## 参考文献 I

- Arai, Takuji (2014) "Convex Risk Measures for CdI<sub>g</sub> Processes on Orlicz Hearts," *SIAM Journal on Financial Mathematics*, Vol. 5, No. 1, pp. 609-625, URL: <https://doi.org/10.1137/130908427>, DOI: <http://dx.doi.org/10.1137/130908427>.
- Becker, Sebastian, Patrick Cheridito, and Arnulf Jentzen (2020) "Pricing and Hedging American-Style Options with Deep Learning," *Journal of Risk and Financial Management*, Vol. 13, No. 7, URL: <https://www.mdpi.com/1911-8074/13/7/158>, DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/jrfm13070158>.
- Buehler, Hans, Lukas Gonon, Josef Teichmann, and Ben Wood (2019) "Deep hedging," *Quantitative Finance*, Vol. 19, No. 8, pp. 1271-1291, URL: <https://doi.org/10.1080/14697688.2019.1571683>, DOI: <http://dx.doi.org/10.1080/14697688.2019.1571683>.
- Longstaff, Francis A. and Eduardo S. Schwartz (2001) "Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach," *The Review of Financial Studies*, Vol. 14, No. 1, pp. 113-147.

## 参考文献 II

- Wang, Yang and Russel E. Caflisch (2009) "Pricing and Hedging American-Style Options: A Simple Simulation-Based Approach," *Derivatives*.
- Xu, Mingxin (2006) "Risk Measure Pricing and Hedging in Incomplete Markets," *Annals of Finance*, Vol. 2, pp. 51-71, 02, DOI:  
<http://dx.doi.org/10.1007/s10436-005-0023-x>.
- 佐久間達也 (2023) 「アメリカンオプションに対する Deep Hedging の学習方法に関する考察」,, URL :  
[https://www.biz.tmu.ac.jp/quantitative-finance/wp-content/uploads/2023/01/paper\\_Sakuma2023.pdf](https://www.biz.tmu.ac.jp/quantitative-finance/wp-content/uploads/2023/01/paper_Sakuma2023.pdf), ワーキングペーパー.



## 継続価値関数とデルタヘッジの計算方法

- 本検証では、深層学習のモデルとの比較でデルタヘッジによるモデルを使用した。
- 行使されるまでの時点におけるバミューダンオプションの価値を表す継続価値関数を微分した値をバミューダンオプションのデルタと考え、その推定値として、継続価値関数の近似を微分した値を使用している。
- 継続価値関数が存在しない時点 0 におけるデルタの数値計算には Wang and Caflisch [2009] が提案した Modified LSM (MLSM) 法により推定した関数を微分することで対応している。
- 継続価値関数の数値計算手法として、LSM 法を採用し、基底関数は Longstaff and Schwartz [2001] に倣って選択している。

## 原資産が 1 次元・取引コストのないケース

Table: 1 次元 (バミューダンコールオプション), 取引コストなし

評価指標 統計量	MSE					参考値	
NN 型	1S-FF	1S-Semi	1S-Full	2S-Semi	2S-Full	デルタヘッジ	ヘッジなし
平均	-0.034	-0.033	-0.034	-0.035	-0.036	0.001	0.000
標準偏差	0.648	0.637	0.636	0.634	0.625	1.182	4.687
-CVaR <sub>0.95</sub>	-1.511	-1.487	-1.426	-1.521	-1.455	-2.808	-10.609
MSE	0.421	0.407	0.406	0.403	0.392	1.398	21.972

- 取引コストがないケースでの 1 次元バミューダンコールオプションに対するヘッジ結果.
- 表の数値は各サンプルの時点  $t_0^*$  で行使された際における PL の値に対する各種統計量.
- デルタヘッジは時点 0 におけるデルタを Modified LSM (MLSM) 法 Wang and Caflisch [2009] で計算し, それ以外の時点におけるデルタを継続価値関数の近似の微分により求めた結果.
- ヘッジなしは初期原資産価格と行使された時刻における割引済みペイオフの差.

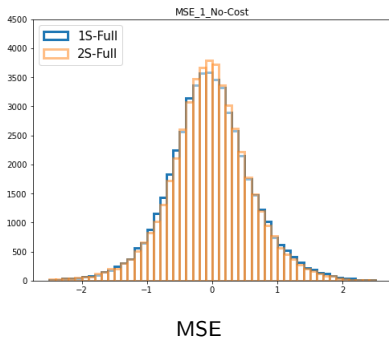
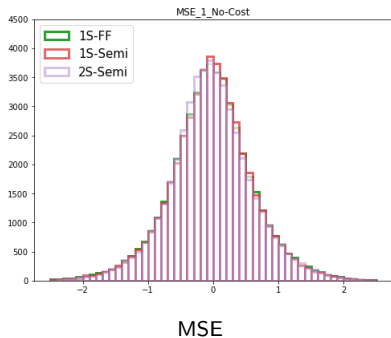


Figure 2. 取引コストがないケースでの1次元バミューダンコールオプションに対するPLの分布。

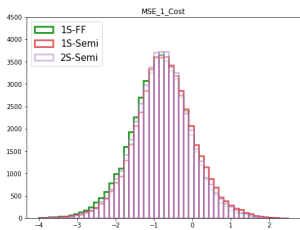
## 原資産が 1 次元・取引コストのあるケース

Table: 1 次元 (バミューダンコールオプション), 取引コストあり

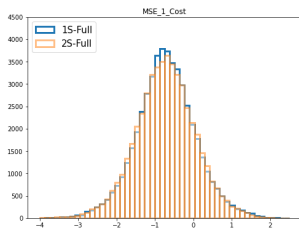
統計量 \ 評価指標	MSE				
	1S-FF	1S-Semi	1S-Full	2S-Semi	2S-Full
NN_type					
平均	-0.846	-0.732	-0.722	-0.781	-0.728
標準偏差	0.772	0.781	0.771	0.762	0.779
-CVaR <sub>0.95</sub>	-2.563	-2.419	-2.403	-2.430	-2.417
MSE	1.313	1.147	1.115	1.191	1.137

統計量 \ 評価指標	CVaR <sub>0.95</sub>				
	1S-FF	1S-Semi	1S-Full	2S-Semi	2S-Full
NN_type					
平均	-0.943	-0.841	-0.790	-0.829	-0.818
標準偏差	0.816	0.820	0.832	0.797	0.803
-CVaR <sub>0.95</sub>	-2.387	-2.299	-2.231	-2.249	-2.226
MSE	1.557	1.379	1.317	1.323	1.312

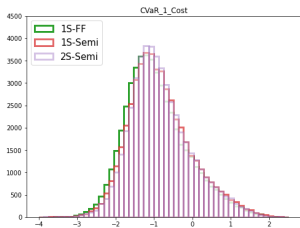
取引コストがあるケースでの 1 次元バミューダンコールオプションに対するヘッジ結



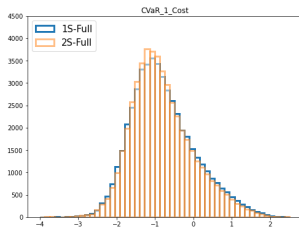
MSE



MSE



CVaR<sub>0.95</sub>



CVaR<sub>0.95</sub>

Figure 3. 取引コストがあるケースでの1次元パミュダンコールオプションに対するPLの分布.

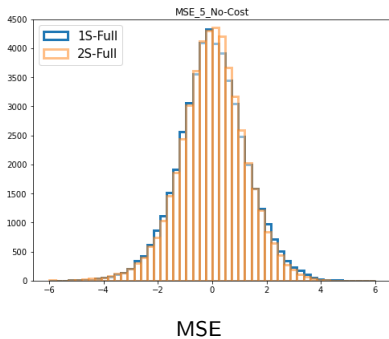
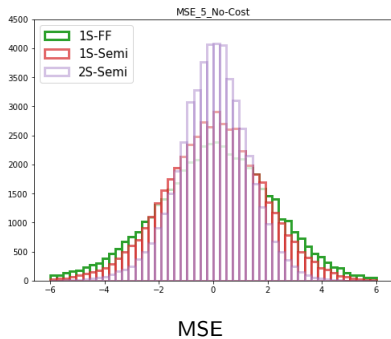
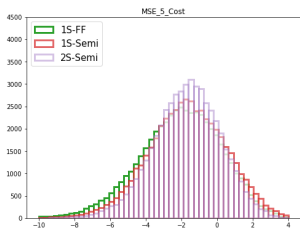
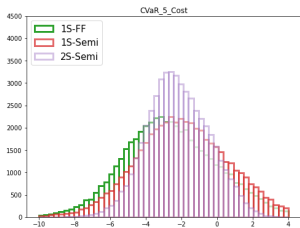


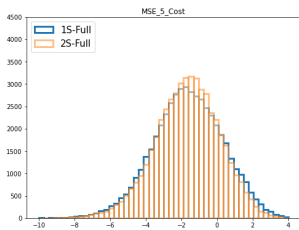
Figure 4. 取引コストがないケースでの5次元バミューダンコールオプションに対するPLの分布。



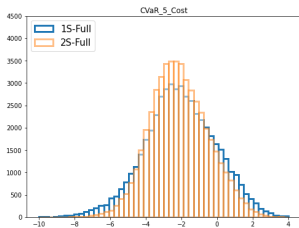
MSE



CVaR<sub>0.95</sub>



MSE



CVaR<sub>0.95</sub>

Figure 5. 取引コストがあるケースでの5次元パミュダグコールオプションに対するPLの分布.

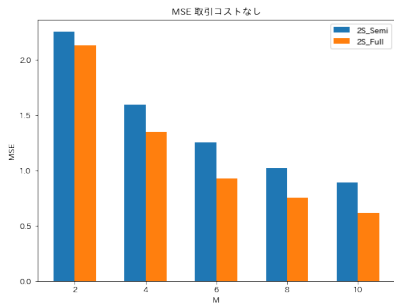
## 検証 3

### リバランス回数が増えた場合の分析

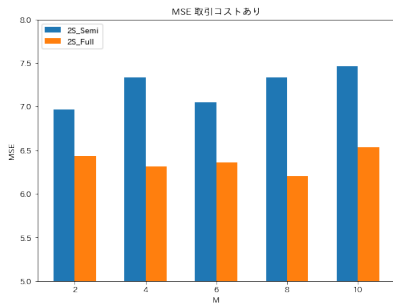
- リバランス回数が増えた場合で 2S のパフォーマンスがどのように変化するかを分析する.
- Semi-recurrent NN はリバランスの日数が増えると, NN 全体で層の数が増える.
- NN は構造がネストするほど学習が難しくなるため, Semi-recurrent NN はリバランスの多い設定ではパフォーマンスが悪化する可能性がある.
- 検証ではリバランス回数である  $M$  を変えパフォーマンスを確認する.
- 各パラメーターは検証 1 と同じである.



# 結果



取引コストがないケース



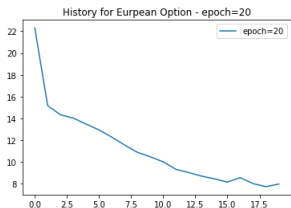
取引コストがあるケース

Figure 6. 損失関数を MSE とし、リバランス回数  $M$  を変化させた場合における損失関数の値。モデルは 2S で Semi-recurrent NN を使用したモデルと Full-recurrent NN を使用したモデル。

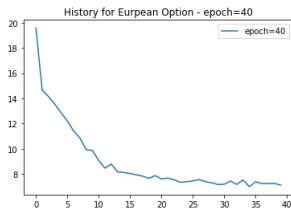
## 検証 4

### ヨーロッパオプションの精度と 2S の精度

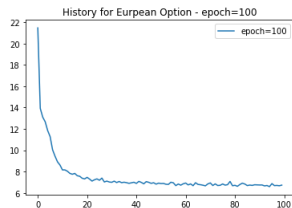
- 第一段階のエポック数を変えた場合での 2S の精度を分析した.
- 検証では第一段階のエポック数を, 20, 40, 100 と変えて検証した.
- 各パラメーターは検証 1 と同じである.



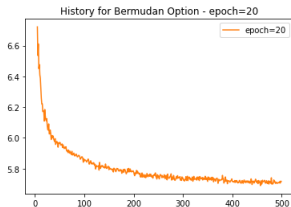
(a1)



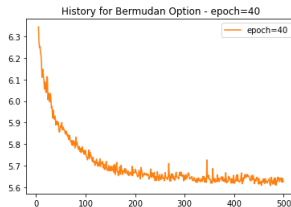
(a2)



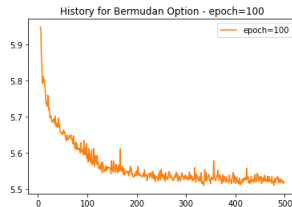
(a3)



(b1)



(b2)



(b3)

**Figure 7.** a はヨーロピアンオプションに対する学習の経過であり, b はバミューダンオプションに対する学習の経過である.