分散型交換所の価格決定メカニズムと関数形に関する研究

小河　愛実

東京都立大学　大学院経営学研究科
ファイナンスプログラム

March 10, 2023

Outline

1. **DeFi と DEX について**
2. **AMM の概要**
3. モデル
4. シミュレーション
5. まとめ

DeFi とは

Defi とは何か？

- ブロックチェーン上で構築された Peer-to-Peer の金融システムで、 ブロックチェーン上のスマートコントラクトと呼ばれるプログラムコードで構築されている。

さらに、以下の特徴をもつ。

- 誰でもアクセスできる
- 取引データや、取引ルール全てが公開され透明性が高い
- 中央集権的な仲介者が不在で、資産を誰かに預けることがない (non-custodial)
- サービス間の接続性

銀行のような融資や、保険、オプション取引などさまざまな金融サービスがある。

DEX とは

DEX(Decentralized Exchange) は DeFi の１種であり、スマートコントラクトに基づいて取引される Peer-to-Peer の暗号資産交換所。
DEX では、法定通貨は使えないが暗号資産間の交換需要に対応。
DeFi で、運用で得たさまざまな暗号資産を、次の投資に使える仮想通貨に交換するなど、DeFi のユーザーにとって必要不可欠な存在。

→ 中央集権型の交換所を CEX と呼ぶ。中央集権型とは、バイナンスやコインベース、ビットフライヤーなど企業が資金を預かって交換などを仲介する形の交換所。

DEX には CEX に対して以下のような利点がある

- 仲介事業者に関するリスク、カウンターパーティーリスクを低減
- 仲介料が不要になる事による、潜在的な取引コストの低減
- 流動性の低い資産やハイリスク資産などへのアクセス

DEX の価格決定メカニズム

DEX の多くは、CEX とは違う価格決定メカニズムで動いている。

2016 年、最も初期の DEX である EtherDelta 誕生。Limit Order Book による価格決定。$\longrightarrow$ ブロックチェーンの処理速度などが問題となり、使い勝手に課題。

2018 年、現在最大手の Uniswap が誕生。Uniswap は Automated Market Maker(AMM) と呼ばれるアルゴリズムによる価格決定メカニズムを備える。AMM は資産の交換用の流動性を保管する流動性プールと、プール内の資産の量から価格を決める関数 f をもつ。

AMM の例 (Constant Product)

2 種類の資産 C と X があり、それぞれ (c, x) だけプールに入っているとする。関数の形が $f(c, x; k) = cx - k$(k は定数) で P を実行価格とし、資産 X を δ 引き出す取引をすると、

$$x \longrightarrow x - \delta \tag{1}$$

$$c \longrightarrow c + P\delta \tag{2}$$

$$cx - k = (c + P\delta)(x - \delta) - k = 0 \tag{3}$$

となるように $P = \frac{c}{x-\delta}$ が決まる。

先行研究と研究の目的

DEX は、伝統金融に疑問を持つ人や、暗号資産の分散・透明性などの思想に共感した人、暗号資産関連の事業者や裁定取引、投機筋など、DeFi で運用するさまざまな人が利用し始めている。
そのなかで、

- この価格決定メカニズムはどのような性質をもつのか
  例えば流動性の提供者は手数料収入などがなければ必ず損失が出る。流動性提供者の収益モデルの研究がある（Clark (2020)Clark (2021)）
- Constant Product 以外に市場環境に適した関数は存在しないのか
  Constant Product 型と Constant Sum 型（Angeris, Evans and Chitra (2020))、幾何平均型（Evans (2020)）など
- CEX と DEX で 2 種類の価格決定メカニズムがあるなかで、相互にどのような影響を及ぼすのか
  裁定取引のない場合 (Alfred and Parlour) やプレーヤーが効用を持って取引市場を選択する場合 Aoyagi and Ito (2021) など。

などについて、研究が進められている。
ただ、Constant Product 型以外の関数の探索はまだ十分とは言えず、市場操作の可能性などリスク評価のための研究も不十分だと考えた。
本研究では、Constant Product 以外の関数でシミュレーションにより値動きなどを観察し、AMM への理解を深めることを狙う。

AMM の概要

資産 C,X の 2 種類を交換する流動性プールを考える。プール内の資産の量をそれぞれ (c,x) と置き、関数を $f(c,x;\vec{\alpha})=0$ とおく。ここで $\vec{\alpha}\in\mathbb{A}\subset\mathbf{R}^n$。$\mathbb{A}$ はパラメータのドメイン
プールから資産 X を δ 引き出し、プールに資産 C を支払う場合、実行価格 P を使うと、流動性の中の資産の量は

$$x\longrightarrow x-\delta \tag{4}$$

$$c\longrightarrow c+P\delta \tag{5}$$

となる。このとき

$$f(c,x;\vec{\alpha})=f(c+P\delta,x-\delta;\vec{\alpha})=0 \tag{6}$$

となるように、実行価格が決まる。この関数 f を保形関数と呼ぶ。

この保形関数を使ってスポット価格 p を

$$p(c,x;\vec{\alpha}):=\frac{f_x(c,x;\vec{\alpha})}{f_c(c,x;\vec{\alpha})} \tag{7}$$

と定義する。ここで $f_x(c,x;\vec{\alpha})=\frac{\partial}{\partial x}f(c,x;\vec{\alpha})$、$f_c(c,x;\vec{\alpha})=\frac{\partial}{\partial c}f(c,x;\vec{\alpha})$。$f$ は微分可能とする。

保形関数の性質

保形関数は以下の条件を満たす。

(1) f は c と x それぞれについて微分可能で、$f_c(c, x; \vec{\alpha}), f_x(c, x; \vec{\alpha})$ は全ての c, x に対し、正の値をとる。

(2) 任意の $\vec{\alpha} \in \mathbb{A}, x > 0$ に対して $f(h(x; \vec{\alpha}), x; \vec{\alpha}) = 0$ を満たし、x に対して減少関数であるようなパラメータ $\vec{\alpha}$ を持つ関数 $h : \mathbf{R}_{++} \to \mathbf{R}_{++}$ が存在する。

(3) $\{(c, x) \mid f(c, x; \vec{\alpha}) \geq 0\}$ は全ての $\vec{\alpha} \in \mathbb{A}$ に対して、凸になる。

(1) は資産価格が正である条件。(3) は流動性プール内の X の量が減少したとき、X の価格が上昇することを示せる。(Aoyagi and Ito (2021)、Capponi and Jia (2021))

スポットプライスと実行価格

スポット価格 p は

$$p(c, x; \vec{\alpha}) := \frac{f_x(c, x; \vec{\alpha})}{f_c(c, x; \vec{\alpha})} \tag{8}$$

と定義された。また、実行価格は、

$$f(c, x; \vec{\alpha}) = f(c + P\delta, x - \delta; \vec{\alpha}) = 0 \tag{9}$$

で決まる。ここで c を x の関数 $h(x; \vec{\alpha})$ で書く。ここで資産 X を δ 単位プールから引き出す取引をした後のスポット価格 $\tilde{p}$ は

$$\tilde{p}(\delta; x_0, \vec{\alpha}) := p(h(x_0 - \delta; \vec{\alpha}), x_0 - \delta; \vec{\alpha}) = \frac{f_x(h(x_0 - \delta; \vec{\alpha}), x_0 - \delta; \vec{\alpha})}{f_c(h(x_0 - \delta; \vec{\alpha}), x_0 - \delta; \vec{\alpha})} \tag{10}$$

と書ける。この時、実行価格 P は

$$P(\delta; x_0, \vec{\alpha}) := \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \tilde{p}(\delta'; x_0, \vec{\alpha}) d\delta' \tag{11}$$

と書ける。

Impermanent Loss

時刻 t_0 に流動性プロバイダーが (c_0, x_0) の量の資産をプールに提供し、その後時刻 t にプールの流動性の量が実行価格 P を用いて $(c_0 + P\delta, x_0 - \delta)$ になったとする。
時刻 t_0, t のどちらでもスポット価格 $p_0 := p(c_0, x_0; \vec{\alpha}), p := p(c_0 + P\delta, x_0 - \delta; \vec{\alpha})$ は裁定取引を通して、CEX で決まる市場価格 S_0, S に等しくなっているとする。
この時もし、流動性を提供せず保有したままだった場合、保有資産は

$$c_0 + Sx_0 \tag{12}$$

一方、流動性を提供し、何らかの取引が実行されていたとすると、

$$(c_0 + P\delta) + S(x_0 - \delta) \tag{13}$$

となる。この差は

$$(c_0 + P\delta + S(x_0 - \delta)) - (c_0 + Sx_0) = P\delta - S\delta = (P - S)\delta \tag{14}$$

となる。これは凸性の条件から常に負になる。これを Impermanet Loss と呼び、流動性提供を促すためには、これを埋め合わせる手数料が必要になる。

モデル

AMM による DEX と、Limit Order Book による CEX の２市場があり、DEX に流動性を提供する流動性プロバイダー（LP）とノイズトレーダー、DEX と CEX の間で裁定取引をするアービトラージャーの３種類のプレーヤーがいるモデルを作り、AMM について考察する。

時間構造

資産 C と資産 X の T_0 時点の流動性の量を (C_0, X_0)、CEX での T_0 時点の価格を S_0、ノイズトレーダーが N 人、アービトラージャーが T_0' で行動するとすると、時間構造は以下のようになる。

time	price	意思決定者	行動詳細
T_0	$S_C(T_0) = S_0$ $S_D(T_0) = p(C_0, X_0; \vec{\alpha})$	LP	流動性が提供される。
t_1	$S_C(t_1)$ $S_D(t_1) = p(C_0, X_0; \vec{\alpha})$	Noise 1	Noise1 が注文を出す。
t_2	$S_C(t_2)$ $S_D(t_2) = p(C_0, X_0; \vec{\alpha})$	Noise2	Noise2 が注文を出す。
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t_N	$S_C(t_N)$ $S_D(t_N) = p(C_0, X_0; \vec{\alpha})$	Noise N	Noise N が注文を出す。
T_0'	$S_C(T_0')$ $S_D(T_0') = p(C_0, X_0; \vec{\alpha})$	Arb	Arb が注文を出す。
T_1	$S_C(T_1)$ $S_D(T_1)$		DEX の T_0' までの 全ての注文を実行

CEX と DEX の設定

CEX の設定

1 期間 $[T_0, T_1]$ の間、幾何ブラウン運動で価格が変化するとする。

$$S_C(T_0') = S_C(T_0) \cdot \exp\left\{\mu(T_0' - T_0) + \sigma\sqrt{T_0' - T_0} \cdot \xi_1\right\} \tag{15}$$

$$S_C(T_1) = S_C(T_0') \cdot \exp\left\{\mu(T_1 - T_0') + \sigma\sqrt{T_1 - T_0'} \cdot \xi_2\right\} \tag{16}$$

ここで、σ^2 と μ は 1 期間 $[T_0, T_1]$ での分散とドリフト。また ξ_1, ξ_2 は独立に標準正規分布に従う確率変数である。

DEX の設定

1 期間に取引するノイズトレーダーの数 N はパラメータ λ を持つポアソン分布

$$N \sim Po(\lambda) \tag{17}$$

で決まる。

ノイズトレーダー

$i \in \{1, \dots, N\}$ 番目のノイズトレーダーは時刻 t_i に

$$\eta_i \Delta_{NT} \tag{18}$$

だけ X を引き出すとする。ただし、

$$P(\eta_i = 1) = P(\eta_i = -1) = \frac{1}{2} \qquad (i.i.d) \tag{19}$$

この時、実行価格が P_i とすると、手数料は

$$\gamma \Delta_{NT} P_i \tag{20}$$

となる。ノイズトレーダー全体の $t = T_1$ 時点の収益は

$$\Pi_{NT}(\Delta_{NT}; N) := \sum_{i=1}^{N} (\eta_i \Delta_{NT} S_C(T_1) - \eta_i \Delta_{NT} P_i) - \sum_{i=1}^{N} \gamma \Delta_{NT} P_i \tag{21}$$

と表現する。

アービトラージャー

時刻 T_0' における行動は以下のようになる。

- CEX の価格 $S_C(T_0')$ とノイズトレーダーの注文から決まる DEX での価格の差、DEX の手数料から収益を最大にする取引量 Δ_A を決める。
- CEX で Δ_A 単位の X を売却し、$S_0(T_0')\Delta_A$ 単位の C を得る。
- DEX で実行価格 P_A で Δ_A 単位の X を引き出し、プールに $P_A\Delta_A$ 単位の C を支払うよう注文を出す。
- この注文の手数料として、$\gamma P_A|\Delta_A|$ 単位の C を流動性提供者に支払う。

ノイズトレーダーの注文を全て処理した後のプール内の流動性 (C_N, X_N) に対して、アービトラージャーの収益を

$$\Pi_A(\Delta_A) := (S_C(T_0') - P_A)\Delta_A - P_A|\Delta_A|\gamma \tag{22}$$

と定義する。
ここで、アービトラージャーは利益が出なければ取引をしないので、DEX での実行価格が

$$\frac{S_C(T_0')}{1+\gamma} < P_A < \frac{S_C(T_0')}{1-\gamma} \tag{23}$$

の範囲に収まる場合アービトラージャーは取引をしない。DEX と CEX の価格は裁定取引後も手数料に応じた価格差ができる。

流動性提供者 (LP)

Impermanent Loss はプール内の資産、CEX での価格を T_0 で $(C_0, X_0), S_0, T_1$ で $(C_1, X_1), S_1$ とおくと

$$\Pi_{IL} := (S_1 X_1 + C_1) - (S_1 X_0 + C_0) \tag{24}$$

手数料収入は

$$\Pi_{fee} := \sum_{k=1}^{N} P_k \Delta_{NT} \gamma + P_A |\Delta_A| \gamma \tag{25}$$

と表現できる。LP の期待収益は

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Pi_{LP} \mid \mathscr{F}_{T_0}] &= \mathbb{E}[\Pi_{IL} + \Pi_{fee} \mid \mathscr{F}_{T_0}] \\ &= \mathbb{E}\left[S_1 X_1 + C_1 \mid \mathscr{F}_{T_0}\right] - \mathbb{E}[S_1 X_0 + C_0 \mid \mathscr{F}_{T_0}] \\ &+ \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} \gamma \Delta_{NT} P_k + \gamma |\Delta_A| P_A \middle| \mathscr{F}_{T_0}\right]\end{aligned} \tag{26}$$

となる。これが正でなければ流動性は提供されない。シミュレーションでこの損益を中心に考察する。

CES 関数の導入

保形関数として、パラメータ $\vec{\alpha} \in \mathbb{A} \subset \mathbf{R}^n$ を持つ関数を考える。
Constant Product 型 $f(x, c; \vec{\alpha}) = xc - k = 0, (\mathbb{A} := [k] | k > 0)$ の拡張として、
Constant Elasticity of Substitution Function (CES 関数) を導入する。

$$f(x, c; \vec{\alpha}) := \left[\beta x^{-\rho} + (1-\beta) c^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} - k \tag{27}$$

ここで

$$\vec{\alpha} \in \mathbb{A} := \{[k, \rho, \beta]^{\top} \in \mathbf{R}^3 | k > 0, -1 < \rho < \infty, 0 < \beta < 1\} \tag{28}$$

CES 関数のポイント

ρ は elasticity を示すパラメータ。ρ を大きくすると elasticity が上がる。$\longrightarrow$ 価格変動は大きくなり、IL は小さくなる。また、

- $\beta = 0.5$,$\rho \to 0$ の極限で Constant Product 型
- $\beta = 0.5$,$\rho \to -1$ の極限で Constant Sum 型

に等しくなる。

この関数は前述の条件を満たす。

価格や資産量の動き

時刻 t に DEX の流動性が (x, c) の時、資産 X をプールから δ 単位引き出すときプール内の資産は

$$x \rightarrow x - \delta \tag{29}$$

$$c \rightarrow c + P\delta \tag{30}$$

と動く。この時実行価格 P は

Constant Product 型 $f(x, c; \vec{\alpha}) = xc - k$

$$P = \frac{c}{x - \delta} \tag{31}$$

CES 関数型

$$P = \frac{1}{\delta}\left\{\left[\frac{\beta}{1-\beta}\left[x^{-\rho} - (x-\delta)^{-\rho}\right] + c^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} - c\right\} \tag{32}$$

となる。LP の収益に注目してシミュレーションを進めた。

シミュレーション

シミュレーションの結果

シミュレーションの設定

CEX の設定

1期間 $[T_0, T_1]$ を m 等分し、確率変数 ξ_j を

$$\xi_j \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{m}) \tag{33}$$

と書く。ただし独立同分布で、$j = 1, 2, \cdots, m$。この時、CEX での価格はドリフト μ を使って

$$S_C(T_0^j) = S_C(T_0^{j-1})(1 + \frac{\mu}{m} + \xi_j) \tag{34}$$

に従って変化する。

Table: パラメータ

記号	値	説明
S_0	1250	T_0 の価格
X_0	90000	T_0 の資産 X の流動性
C_0	$X_0 S_0$	T_0 の資産 C の流動性
σ	$0.05/\sqrt{96}$	CEX でのボラティリティ
γ	0.0005	DEX での手数料率
Δ_{NT}:	80	Noise Trader 一人当たりの交換量
λ	30	Noise Trader の人数を決めるポアソン分布のパラメータ
ρ	0.5	CES 関数の代替弾力性の指数

イーサリアムとステーブルコインの実際のプールを参考に決めた。β は流動性の量 (X_0, C_0) が Constant Product 型と等しくなるように決める。資産のボラティリティはイーサリアムの 180 日ボラティリティ。$\mu = 0$ 、CEX での手数料、金利も 0 とする。

結果

プール内の X の量 (N=35 のケース)

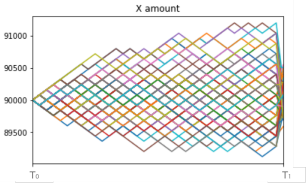


Figure: Constant Product 型の X の量

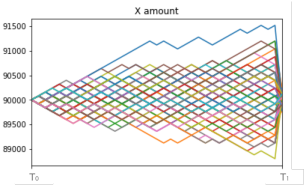


Figure: CES 関数型の X の量

実行価格 (N=35 のケース)

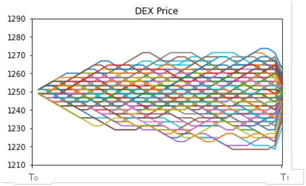


Figure: Constant Product 型の実行価格

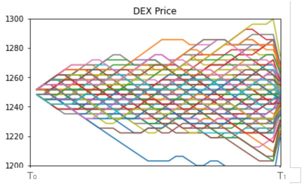


Figure: CES 関数型の実行価格

結果

Player の収益分布

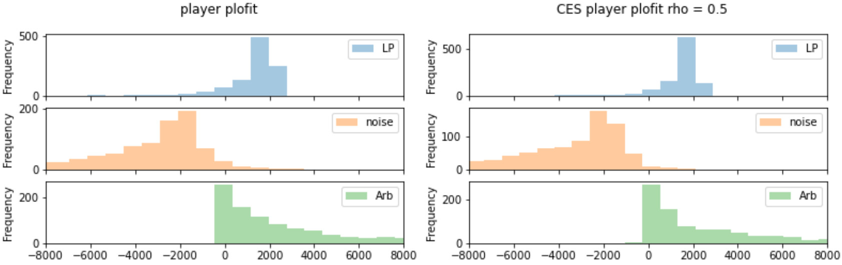


Figure: Constant Product 型

Figure: CES 関数型

- LP の収益は CES 型の方が損失側の分布が少ない
- ノイズトレーダーは損失側のテールが増えた

CES 型関数は LP の損失を抑えられるように見える。

CES 関数の性質

ρ の変化に対するプレーヤーの損益

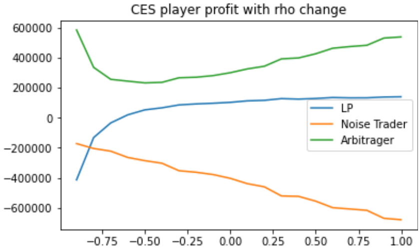


Figure: ρ の変化によるプレーヤーの損益の変化

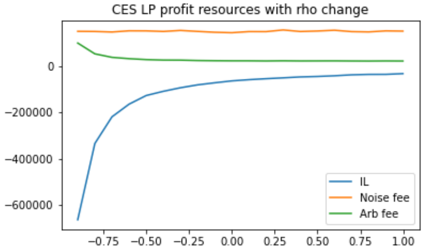


Figure: ρ の変化による、LP の損益の収益源の変化

- ρ が大きくなると Impermanent Loss が小さくなる
- ノイズトレーダーの損失は増える。これは価格変化が大きくなるため

ボラティリティーの影響

σ を変化させた場合のプレーヤーの損益
横軸は σ、縦軸は C を基準とした損益

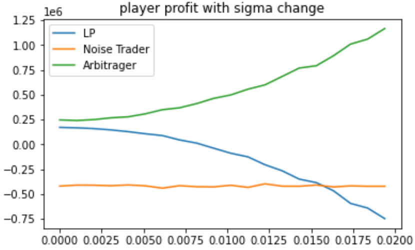


Figure: Constant Product 型

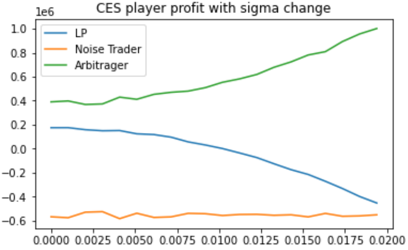


Figure: CES 型

$\sigma = 0.01 \times k/\sqrt{96}$ ただし、$(k = 0, 1, \cdots 19)$ で σ を動かした。
資産のボラティリティが上がっても CES 型の方が LP の損失は抑えられる。

AMM の設計

Constant Product 型と CES 関数型の比較

- CEX での資産のボラティリティが高いと、IL が大きくなり、LP は損失の可能性が高まる。
- CES 関数型は $\rho > 0$ で IL を抑え、LP の収益を安定させる。
- $\rho > 0$ の場合、CES 関数型は資産 X の取引量 Δ に対して、Constant Product 型より価格変化が大きくなる。
- DEX での価格変動が大きくなるとノイズトレーダーの損失が大きくなる。

そこで、イーサリアムよりもボラティリティの高いような資産を考え、AMM を以下のパラメータのように設計してみる。

Table: パラメーター

パラメーター	値
S_0	1.0
X_0	1000000
σ	$0.08/\sqrt{96}$
Δ	700
λ	10
ρ	0.5
β	0.5

手数料率の変化

(X_0, C_0) を等しくし、手数料率を変化させながらプレーヤーの損益を見た。

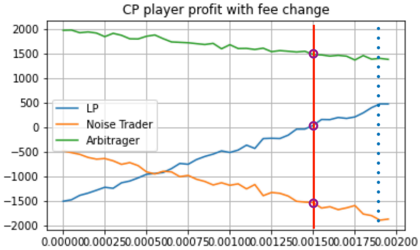


Figure: Constant Product 型

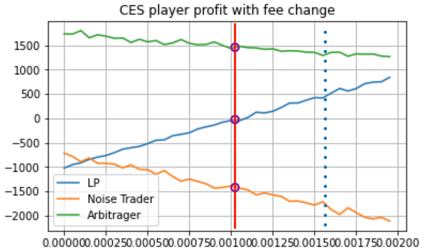


Figure: CES 関数型 (

この設定であれば、3 者の損益を、Constant Product 型と同じようなバランスにしつつ、手数料を下げられる。

シミュレーション結果のまとめ

- 保形関数の形として CES 関数を導入。ρ の変化による DEX での価格の動きの変化などを確認。
- 特にボラティリティの高い資産に対し、CES 関数を導入することで LP の収益を安定させ、手数料を下げられる可能性がある。
- DEX での価格変動は保形関数の形や、ノイズトレーダーの取引量、プール内の資産量に依存する。

今後の課題

関数の形

CES 関数のパラメータの調整で、交換のペアによってはより使い勝手が良くなる可能性もある。安定性などの検証が必要。

AMM の価格への影響

今回は CEX に DEX の影響が及ばないモデルになっている。DEX での取引量が増えてくると、相互の影響を検証する必要がある。

価格決定の安定性

DEX でのボラティリティは取引量と、流動性の量も関連し、流動性の量によってボラティリティをある程度調整できる。暗号資産の発行体など大量保有者が価格決定にどの程度影響を及ぼせるかの検証は必要。

Acknowledgement

指導教官の東京都立大学経営学研究科足立高徳教授、京都大学経済研究所の原千秋教授、東京都立大学経営学研究科の竹原浩太准教授、湯浅智意助教からご指導いただきました。

参考文献

Alfred, L. and C. A. Parlour"Decentralized Exchanges," *SSRN:3905316*.

Angeris, G., A. Evans, and T. Chitra (2020) "When does the tail wag the dog? Curvature and market making," *arXiv:2012.08040*.

Aoyagi, J. and Y. Ito (2021) "Coexisting Exchange Platforms: Limit Order Books and Automated Market Makers," *SSRN*, 3808755.

Capponi, A. and R. Jia (2021) "The Adoption of Blockchain-based Decentralized Exchanges," *arXiv:2103.08842*.

Clark, J. (2020) "The Replicating Portfolio of a Constant Product Market," *SSRN:3550601*.

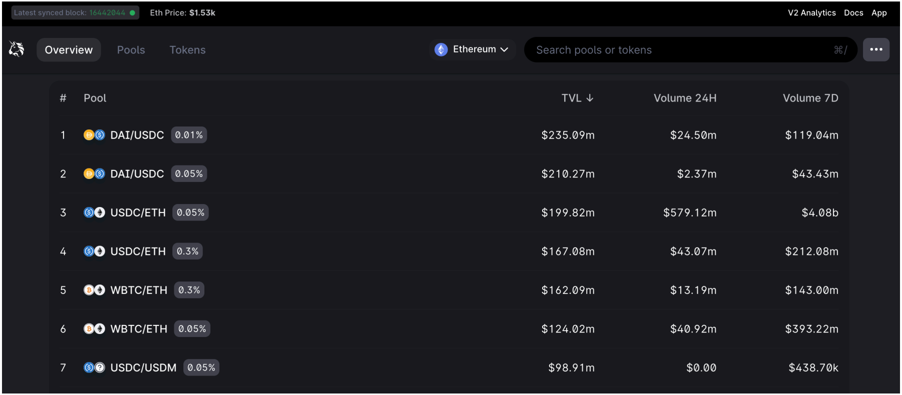
——— (2021) "The Replicating Portfolio of a Constant Product Market with Bounded Liquidity," *SSRN:3898384*.

Evans, A. (2020) "Liquidity Provider Returns in Geometric Mean Markets," *arXiv:2006.08806*.

ありがとうございました

パラメータの設定

代表的な DEX である Uniswap のプールから、初期のパラメータを決めた。



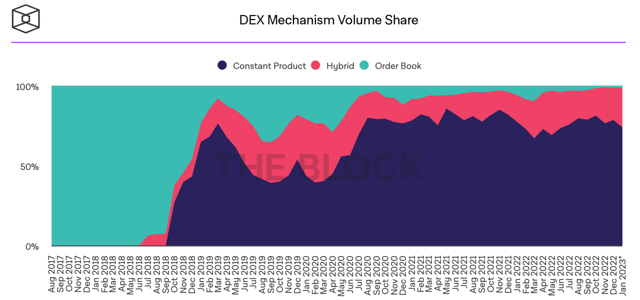
#	Pool	TVL ↓	Volume 24H	Volume 7D
1	DAI/USDC 0.01%	$235.09m	$24.50m	$119.04m
2	DAI/USDC 0.05%	$210.27m	$2.37m	$43.43m
3	USDC/ETH 0.05%	$199.82m	$579.12m	$4.08b
4	USDC/ETH 0.3%	$167.08m	$43.07m	$212.08m
5	WBTC/ETH 0.3%	$162.09m	$13.19m	$143.00m
6	WBTC/ETH 0.05%	$124.02m	$40.92m	$393.22m
7	USDC/USDM 0.05%	$98.91m	$0.00	$438.70k

DEX の価格決定メカニズム

DEX の多くは、CEX とは違う価格決定メカニズムで動いている。

2016 年、最も初期の DEX である EtherDelta 誕生。Limit Order Book による価格決定。→ ブロックチェーンの処理速度などが問題となり、使い勝手に問題。

2018 年、現在最大手の Uniswap が誕生。Uniswap は Automated Market Maker(AMM) と呼ばれるアルゴリズムによる価格決定メカニズムを備える。AMM は資産の交換用の流動性を保管する流動性プールと、プール内の資産の量から価格を決める関数 f をもつ。流動性はプレーヤーが誰でも提供できる。



SOURCES: THE BLOCK, THE GRAPH, COINGECKO
UPDATED: JAN 13, 2023