

RFR 下における cap/floor の評価について*

東京都立大学 大学院経営学研究科

21838301

竹田 凌

2023年3月5日

*本論文は、東京都立大学大学院経営学研究科に提出した修士論文を加筆・修正したものである。

概要

これまで代表的金利指標であったロンドン銀行間取引金利 (London Interbank Offered Rate、以下 LIBOR) は、米ドルの一部テナー (期間) を除き、2021 年 12 月末をもって公表が停止された。代替金利指標として、リスク・フリー・レート (以下、RFR) ベースの金利指標が用いられている。RFR にはターム物 RFR とオーバーナイト (以下、O/N) RFR 複利 (後決め) があり、後者の場合は、複利計算が始まってから受け払いする金利が確定するまで、日毎に受け払いする金利の算出に用いられる O/N レートの決定が行われる。そのため、O/N RFR 複利は金利を先決めするターム物 RFR や LIBOR と枠組みが異なる。そこで、本論文では、O/N RFR 複利の caplet の評価について研究を行う。Willems (2021) では後決め複利 RFR の特徴を捉えた shifted dynamic SABR モデルを仮定し、Hagan, Lesniewski and Woodward (2018) の近似手法を用いて caplet の価格近似式を与えた。一方、本論文では、Gaussian 短期金利モデルの拡張である Quasi-Gaussian 短期金利モデルを用いて caplet の評価を行う。具体的には、Duffie, Pan and Singleton (2000) で導入された手法を参考として、短期金利にアフィンモデルを仮定した上で caplet の価格解を、フーリエ変換によって導出した非線形常微分方程式の解を用いて表現した。この常微分方程式を Runge-Kutta 法を用いて数値的に解き、フーリエ逆変換をすることで caplet の価格を得る。

目次

| | | |
|-------------|-----------------------------|-----------|
| 第1章 | はじめに | 1 |
| 第2章 | 問題設定 | 3 |
| 2.1 | 導入 | 3 |
| 2.2 | O/N RFR 複利の SABR モデル | 4 |
| 2.3 | O/N RFR 複利の SABR パラメータ | 5 |
| 第3章 | 短期金利アプローチ | 7 |
| 3.1 | Quasi-Gaussian モデル | 7 |
| 3.2 | アフィンアプローチ | 8 |
| 3.3 | backward looking caplet の評価 | 9 |
| 3.4 | 微分方程式による表現 | 12 |
| 第4章 | 数値検証 | 15 |
| 4.1 | 数値検証の設定 | 15 |
| 4.1.1 | 金利の設定 | 15 |
| 4.1.2 | Quasi-Gaussian モデルのパラメータ設定 | 15 |
| 4.1.3 | 行使金利の設定 | 16 |
| 4.2 | 3章の方法に対する数値解法 | 16 |
| 4.3 | モンテカルロシミュレーション | 21 |
| 4.4 | 比較結果 | 26 |
| 第5章 | おわりに | 28 |
| 補論 A | SABR モデル | 30 |
| A.1 | standard SABR モデル | 30 |
| A.2 | dynamic SABR モデル | 30 |
| A.3 | 定理 2.3.1 と定理 2.3.2 の証明 | 31 |
| 補論 B | 3章の命題の証明 | 36 |
| B.1 | 命題 3.3.1 の証明 | 36 |
| B.2 | 命題 3.3.2 の証明 | 37 |
| 補論 C | 微分方程式の解法 | 38 |
| C.1 | 4次のルンゲ・クッタ公式 | 38 |
| C.2 | 3.4節の微分方程式の解法 | 38 |
| C.3 | 命題 3.4.1 の証明 | 42 |

第1章 はじめに

ロンドン銀行間取引金利 (London Interbank Offered Rate, 以下、LIBOR) は、米ドルの一部テナー (期間) を除き、2021 年 12 月末をもって公表が停止された。また、米ドルについては、2023 年 6 月末には、全ての LIBOR が公表停止される。代替金利指標としては、リスク・フリー・レート (以下、RFR) ベースの金利指標が用いられる。ここで、RFR にはターム物 RFR とオーバーナイト (以下、O/N) RFR 複利 (後決め) があり、O/N RFR 複利の場合は、複利計算が始まってから受け払いする金利が確定するまで、日毎に受け払いする金利の算出に用いられる O/N レートの決定が行われる。そのため、O/N RFR 複利は金利を先決めするターム物 RFR や LIBOR と枠組みと異なる。このような LIBOR 廃止に対する詳細については、Henrard (2019) に詳細が記載されている。そこで、本論文では O/N RFR 複利の cap/floor の評価について、金利モデルの面から研究する。

本論文で扱う金利 cap(キャップ) は、キャップの買い手が売り手に対してプレミアムを支払うことによって、契約期間中の各金利更改日に基準金利が行使金利を上回った場合に、その差額を受け取ることができる取引である。つまり、キャップは金利のコールオプションである。一般的に金利 cap は満期の異なる金利オプション取引を複数まとめている場合が多く、それぞれの金利オプションを金利 caplet(キャップレット) という。

さて、金利 caplet を評価する際、参照する金利に LIBOR やターム物 RFR を指定する場合は、両者は 3 か月物、6 か月物などを代表とする金利が公表されるので、金利参照期間の開始日に caplet の支払い (payoff) を決定することができる。この場合 (金利参照期間の開始日に金利が決定される場合) の枠組みにおける caplet の評価に関しては、Gaussian 短期金利モデルの代表的なモデルである Hull White モデルでの評価が Hull and White (1990) でされており、SABR モデルでの評価は Hagan *et al.* (2002) でされている。また、LIBOR Market Model(LMM) での caplet の評価は Brace, Gatarek and Musiela (1997)、Rebonato (2002) に記載されており、さらに、Rebonato, McKay and White (2011) では、SABR LMM の場合について記載されている。

一方で、O/N RFR 複利の場合、日毎に O/N レートの決定が行われるため、金利参照期間の終了日まで caplet の支払いを決定することができない。この新しい枠組みでの caplet の評価については、例えば、Willems (2021) では、Hagan, Lesniewski and Woodward (2018) で提案されている dynamic SABR モデルを応用しており、一方 Turfus (2022) では、Gaussian 短期金利モデルを、また、Lyashenko and Mercurio (2019) では LMM を拡張したモデルを提案し、cap の評価を行っている。

前述の先行研究に対してそれぞれ以下の点で留意が必要である。Willems (2021) では、shifted dynamic SABR モデルを用いているため、金利水準に制限がある。また、caplet の評価に必要な effective parameter (2.3 節参照) を求める際、及びその effective parameter から価格を計算する際にそれぞれ近似を用いているため、一定の誤差が生じる可能性がある。Turfus (2022) における Gaussian 短期金利モデルでは、ボラティリティが定数もしくは時間依存したモデルであるため、ボラティリティスマイルに対するキャリブレーションの柔軟性が低い。Lyashenko and Mercurio (2019) では、log normal モデルを仮定しているため、金利水準に制限があり、こちらもボラティリティスマイルに対するキャリブレーションの柔軟性が低い。

そこで、本論文では新しい枠組みとなった O/N RFR 複利の場合の caplet を評価する際に、O/N RFR 複利の特徴を踏まえ、Gaussian 短期金利モデルを拡張した Quasi-Gaussian 短期金利モデルを仮定し、caplet の評価を行った。Quasi-Gaussian 短期金利モデルを用いることで、金利の水準に制限がなく、また、短期金利にアフィン構造を仮定することで近似を用いる必要なく、ボラティリティスマイルに対して柔軟にキャリブレーションできる。この Quasi-Gaussian 短期金利モデルに関しては、例えば、Andersen and Piterbarg (2010) にモデルの詳細、オプション性のある商品評価について記述されている。

最後に、本論文の構成を以下の通り示す。2 章では問題設定として、Willems (2021) に沿って caplet の評価について整理し、Willems (2021) の shifted dynamic SABR モデルを応用した O/N RFR の cap/floor の評価を紹介する。3 章では、短期金利モデルである、Quasi-Gaussian モデルを用いた O/N RFR の caplet の評価を提案する。短期金利にアフィン構造を仮定することで、caplet の評価をある微分方程式の求解とそのフーリエ逆変換に分解するものである。4 章では、3 章で導出した caplet の評価式に対し、1) 前述の微分方程式を Runge-Kutta 法で解き、また、フーリエ逆変換を数値的に行う場合と、2) モデルに対しモンテカルロシミュレーションを実施した場合、この二通りで caplet の評価を行い比較・検証をする。5 章では本論文で得られた結果をまとめ、今後の発展について述べる。最後に、補論では、SABR モデル、dynamic SABR モデルについての詳細及び Willems (2021) の定理の証明さらに、2 章、3 章にある命題、定理の証明について述べる。

第2章 問題設定

この章では、まず Willems (2021) に沿って、O/N RFR 複利の場合における caplet の評価について解説する。次に、Willems (2021) で提案されている cap/floor の評価を紹介する。

2.1 導入

本節では、ターム物 RFR の caplet(forward looking caplet) と O/N RFR 複利の caplet(backward looking caplet) の価格評価を解説する。フォワード中立化法を用いることで、forward looking caplet と backward looking caplet の比較を容易にしている。

まず、フォワード中立確率について定義する。そのために、ゼロクーポン債券(割引債)の価格を定義する。

定義 2.1.1 (ゼロクーポン債券). 現在の時点 t として、満期 T ($t \leq T$) において額面 1 単位の支払いを受けるゼロクーポン債券の価格を $P(t, T)$ とする。

定義 2.1.2 (フォワード中立確率). 時点 t における、ある証券の価格を S_t とし、この証券をゼロクーポン債券で割った相対価格、すなわち満期 T のフォワード価格を

$$S_t^T = \frac{S_t}{P(t, T)} \quad (2.1)$$

とする(ここで、任意の $t > 0$ に対し、 $S_t > 0$ としておく)。このとき、ある確率測度 \mathbb{Q}^T に関する標準ブラウン運動 W_t^T 、ある確率過程 $\tilde{\sigma}_t$ が存在し、

$$\frac{dS_t^T}{S_t^T} = \tilde{\sigma}_t dW_t^T \quad (2.2)$$

とかけることが知られている。このとき、確率測度 \mathbb{Q}^T を $(T-)$ フォワード測度とよぶ。

次に、フォワードレート及びスポットレートの定義する。

定義 2.1.3 (フォワードレート). 時点 t における将来時点 s ($t < s$) に対する瞬間的な利子率であるフォワードレートを

$$f(t, s) := -\frac{\partial}{\partial s} \ln P(t, s) \quad (2.3)$$

と定義する。

定義 2.1.4 (スポットレート).

$$r_t := \lim_{s \rightarrow t} f(t, s) \quad (2.4)$$

この r_t をスポットレート(短期金利)とよぶ。

定義 2.1.5. 金利の参照期間を $[\tau_0, \tau_1]$ とする。このとき、 $[\tau_0, \tau_1]$ に対して次の確率過程を定義する。

$$R_t := \mathbb{E}_t^{\tau_1} \left[\frac{1}{\tau_1 - \tau_0} \left(\exp \left(\int_{\tau_0}^{\tau_1} r_s ds \right) - 1 \right) \right], \text{ for } t \leq \tau_1 \quad (2.5)$$

ここで、 $\mathbb{E}_t^{\tau_1}[\cdot]$ は $(\tau_1 -)$ フォワード測度 \mathbb{Q}^{τ_1} の下での \mathcal{F}_t に関する条件付き期待値である。

次に、forward looking の場合と backward looking の場合のそれぞれについて、caplet の支払い (payoff) について定義をする。本論文では、backward looking の場合に着目し forward looking については、比較のため定義を行うのみとする。両者で異なる点は、金利が確定する時点が、金利参照期間の開始である時点 τ_0 であるか、終了時点 τ_1 であるかという点である。

定義 2.1.6 (forward looking caplet). 支払いが時点 τ_1 で発生するターム物 RFR に対する caplet (forward looking caplet) の payoff は、

$$V_{cal}^f(\tau_1) := (R_{\tau_0} - K)^+(\tau_1 - \tau_0) \quad (2.6)$$

で与えられる。ただし、 K はストライクレートである。

定義 2.1.7 (backward looking caplet). 支払いが時点 τ_1 で発生する O/N RFR 複利に対する caplet (backward looking caplet) の payoff は、

$$V_{cal}^b(\tau_1) := (R_{\tau_1} - K)^+(\tau_1 - \tau_0) \quad (2.7)$$

で与えられる。

上記定義に基づき、フォワード中立化法を用いて backward looking caplet の評価をすると、時点 $t \leq \tau_1$ における backward looking caplet の価値は、(2.7) 式より、

$$V_{cpl}^b(t) = P(t, \tau_1) \mathbb{E}_t^{\tau_1} [(R_{\tau_1} - K)^+(\tau_1 - \tau_0)] \quad (2.8)$$

と評価できる。

2.2 O/N RFR 複利の SABR モデル

O/N RFR 複利の場合は、複利計算が始まってから受け払いする金利が確定するまで、日毎に O/N レートの決定が行われる。そのため、複利計算が進むにつれて、受け払いする金利の水準が決定する。したがって、複利計算期間の終盤、cap/floor で参照される R_t のボラティリティは低下する。Willems (2021) では R_t に対して shifted dynamic SABR モデルの応用として、確率ボラティリティにスケーリングファクターを取り入れ cap/floor の評価をした。

前述の通り、 $t \in [\tau_0, \tau_1]$ の場合、 R_t の一部が決定 (realised) されている (t によるので全て決定されているとは限らない)。この特徴を反映するため、 R_t が以下の dynamics に従うとする。

$$\begin{aligned} dR_t &= \lambda(t) \sigma_t (R_t + s)^\beta dW_{1,t}^{\tau_1}, \\ d\sigma_t &= \nu \sigma_t dW_{2,t}^{\tau_1}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

ただし、 $s \in \mathbb{R}$ は shift 幅で

$$\sigma_0 = \alpha > 0, \beta \in [0, 1], \nu > 0 \quad (2.10)$$

であり、 $W_{1,t}^{\tau_1}$, $W_{2,t}^{\tau_1}$ は \mathbb{Q}^{τ_1} に関するブラウン運動で、

$$dW_{1,t}^{\tau_1}dW_{2,t}^{\tau_1} = \rho dt, \quad \rho \in [-1, 1] \quad (2.11)$$

をみます。さらに、スケーリングファクターは、

$$\lambda(t) = \min \left(1, \frac{\tau_1 - t}{\tau_1 - \tau_0} \right)^q, \quad q > 0 \quad (2.12)$$

である。

$t \leq \tau_0$ では、(2.12) 式において $\lambda(t) = 1$ になるため、shifted standard SABR モデルに従う。
 $t > \tau_0$ では、(2.12) 式において $\lambda(t) = \frac{\tau_1 - t}{\tau_1 - \tau_0}$ になるため、 t が τ_1 に近づくにつれて確率ボラティリティがスケールダウンする。また、 q がボラティリティの減少を制御している。

2.3 O/N RFR 複利の SABR パラメータ

Willems (2021) では、backward looking caplet における、金利参照期間の最後に金利が確定するという特徴を、(2.12) 式で定義したスケーリングファクター $\lambda(t)$ を用いて、ボラティリティのスケールダウンにより表現しており、これは時間依存するパラメータを持つ Hagan, Lesniewski and Woodward (2018) の dynamic SABR モデルの応用である。Hagan, Lesniewski and Woodward (2018) では、Hagan *et al.* (2002) で提案されている standard SABR モデルのインプライドボラティリティに対する近似式を使用できるように、effective parameter というアプローチを導入している。effective parameter アプローチとは、 R_t が従う (2.9) 式の shifted dynamic SABR モデルとある (数学的な) 意味で同等であり、かつ parameter が定数である shifted standard SABR モデルを導出するものである。このとき、後者における定数 parameter を、(2.9) 式のモデルに対する effective parameter という。effective parameter を得た上で、これを Hagan *et al.* (2002) における caplet 価格 (インプライドボラティリティ) の近似式に代入することで、結果として (2.9) 式のモデルの下での caplet 価格を近似することができる。

Willems (2021) では、effective parameter がどのように表現されるか二つの場合に分けて導いている。一つ目は、評価時点が金利参照期間中の場合、二つ目は評価時点が金利参照期間より前の場合である。

以下紹介する二つの定理の証明は、補論 A.3 節に記載する。

定理 2.3.1. $\tau_0 < t$ ならば backward looking caplet を評価するための (2.9) 式に対する effective parameter は

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{2\rho}{\sqrt{\zeta}(3q+2)} \\ \hat{\nu}^2 &= \nu^2 \zeta(2q+1) \\ \hat{\alpha}^2 &= \frac{\alpha}{2q+1} \left(\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_0} \right)^{2q} \exp \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\nu^2}{q+1} - \hat{\nu}^2 \right) \tau_0 \right) \\ \hat{\beta} &= \beta \end{aligned}$$

である。ただし、

$$\zeta = \frac{3}{4q+3} \left(\frac{1}{2q+1} + \rho^2 \frac{2q}{(3q+2)^2} \right)$$

である。

次に、 $\tau_0 \geq t$ の場合 (評価時点が金利参照時点より前) の場合の effective parameter は以下のよ
うに表現できる。

定理 2.3.2. $\tau_0 \geq t$ ならば、backward looking caplet を評価するための effective parameter は

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \rho \frac{3\iota^2 + 2q\tau_0^2 + \tau_1^2}{\sqrt{\gamma}(6q+4)}, \\ \hat{\nu}^2 &= \nu^2 \gamma \frac{2q+1}{\iota^3 \tau_1}, \\ \hat{\alpha}^2 &= \frac{\alpha^2}{2q+1} \frac{\iota}{\tau_1} \exp\left(\frac{1}{2}\theta\tau_1\right) \\ \hat{\beta} &= \beta\end{aligned}$$

である。ただし、 ι, θ, γ は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}\iota &= 2q\tau_0 + \tau_1, \\ \theta &= \nu^2 \frac{\tau^2 + 2q\tau_0^2 + \tau_1^2}{2\tau_1\tau(q+1)} - \hat{\nu}^2, \\ \gamma &= \iota \frac{2\tau^3 + \tau_1^3 + (4q^2 - 2q)\tau_0^3 + 6q\tau_0^2\tau_1}{(4q+3)(2q+1)} \\ &\quad + 3q\rho^2(\tau_1 - \tau_0)^2 \frac{3\tau^2 - \tau_1^2 + 5q\tau_0^2 + 4\tau_0\tau_1}{(4q+3)(3q+2)^2}\end{aligned}$$

第3章 短期金利アプローチ

1章で触れた通り、先行研究の Willems (2021) では、shifted dynamic SABR モデルを用いているため、金利水準に制限があること、また、caplet の評価の際に一定の誤差が生じる可能性があること、この二点について留意が必要である。具体的には、effective parameter を導出する際に Hagan, Lesniewski and Woodward (2018) で提案されている偏微分方程式（密度関数に対する偏微分方程式）の近似を、また effective parameter を求めた後、Hagan *et al.* (2002) で提案されている SABR モデルにおけるプライシングの近似式を用いている。

本章では、backward looking の caplet の評価をする際、金利の水準に制限をする必要のない Quasi-Gaussian モデルでの評価について提案する。さらに、短期金利にアフィン構造を仮定することで、近似を用いる必要なく、かつ柔軟にボラティリティスマイルに対してキャリブレーションを可能にしている。backward looking caplet の評価をする際に、Duffie, Pan and Singleton (2000) の手法を参考にしている。具体的には、caplet 価格をフーリエ変換によって導出した非線形常微分方程式の解を用いて表現した。この常微分方程式の解に対し、フーリエ逆変換をすることで caplet の価格を得るものである。

3.1 Quasi-Gaussian モデル

まず、Andersen and Piterbarg (2010) に従い、Quasi-Gaussian モデルを定義する。準備のためマネーマーケットアカウント及びリスク中立測度を定義する。

定義 3.1.1 (マネーマーケットアカウント).

$$B_t := \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) \quad (3.1)$$

B_t をマネーマーケットアカウントとよぶ。

定義 3.1.2 (リスク中立測度). 時点 t における証券価格 S_t をマネーマーケットアカウントで割った相対価格を

$$S_t^* = \frac{S_t}{B_t} \quad (3.2)$$

とする。このとき、ある確率測度 \mathbb{Q} に関して標準ブラウン運動 W_t が存在し、ある確率過程 $\bar{\sigma}_t$ を用いて

$$\frac{dS_t^*}{S_t^*} = \bar{\sigma}_t dW_t \quad (3.3)$$

とかけることが知られている。このとき、確率測度 \mathbb{Q} をリスク中立測度とよぶ。

次に、Quasi-Gaussian モデルを定義する。Quasi-Gaussian モデルは Gaussian 短期金利モデルを拡張したモデルである。Gaussian 短期金利モデルは、ボラティリティが定数もしくは確定的関数であるモデルであるが、Quasi-Gaussian モデルはそれを局所ボラティリティや確率ボラティリティに拡張したモデルである。

確率ボラティリティを表現できるように、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ を固定し、 Ω の要素を ω で表す。

定義 3.1.3 (Quasi-Gaussian モデル). (x_t, y_t) が以下の確率微分方程式に従うとき、これを Quasi-Gaussian モデルという。

$$\begin{aligned} dx_t &= (y_t - \kappa(t)x_t)dt + \sigma_r(t, x_t, y_t, \omega)dW_t \\ dy_t &= (\sigma_r(t, x_t, y_t, \omega)^2 - 2\kappa(t)y_t)dt \\ x_0 &= y_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

ただし、 $\kappa(t)$ は確定的関数とする。

上記の Quasi-Gaussian モデルを用いて、短期金利 r_t を次のように表現する。

$$r_t = f(0, t) + x_t \quad (3.5)$$

ただし、 $f(0, t)$ はフォワードレートの初期の期間構造である。ここで、

$$r(t, x) := f(0, t) + x \quad (3.6)$$

とすれば、

$$r_t = r(t, x_t) \quad (3.7)$$

と表現できる。

以降では、局所ボラティリティの場合を扱う。局所ボラティリティの場合、(3.4) 式のボラティリティ関数 $\sigma_r(t, x, y, \omega)$ は、 t, x, y に依存するため、

$$\begin{aligned} dx_t &= (y_t - \kappa(t)x_t)dt + \sigma_r(t, x_t, y_t)dW_t \\ dy_t &= (\sigma_r(t, x_t, y_t)^2 - 2\kappa(t)y_t)dt \\ x_0 &= y_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる。

注意 3.1.4 (Gaussian 短期金利モデル). (3.4) 式におけるボラティリティ $\sigma_r(t, x, y, \omega)$ が、 t のみ依存する場合、つまり $\sigma_r(t)$ の場合、確定的ボラティリティになる。この場合、Gaussian 短期金利モデルとよばれる。

注意 3.1.5. (3.4) 式におけるボラティリティ $\sigma_r(t, x, y, \omega)$ が、 t と ω にのみ依存する場合、つまり $\sigma_r(t, \omega)$ の場合、確率ボラティリティになる。

注意 3.1.6. (3.4) 式におけるボラティリティ $\sigma_r(t, x, y, \omega)$ が、 t, x, y, ω のすべてに依存する場合、局所確率ボラティリティになる。

3.2 アフィンアプローチ

この節では、(3.8) 式の設定の下、さらに短期金利にアフィン構造を仮定した上で backward looking caplet を評価する。まず、短期金利がアフィン構造を持つようボラティリティ関数 $\sigma_r(t, x, y)$ を以下のように仮定する。

$$\sigma_r^2(t, x, y) = g_0(t) + g_1(t)x + g_2(t)y \quad (3.9)$$

とする。ただし、 $g_0(t), g_1(t), g_2(t)$ は確定的関数である。

なお、厳密には (3.9) 式で定義される右辺は一般に非負であるとは限らないが、後に 4.3 節で見ると通り ((3.9) 式の右辺) < 0 となる確率が低い場合はこれを無視できるとした。

3.3 backward looking caplet の評価

以上の設定の下、本節では、Duffie, Pan and Singleton (2000) の手法に従い、backward looking caplet の評価をする。まず、リスク中立化法より、

$$\begin{aligned} V_{cpl}^b(t) &= B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\frac{V_{cpl}^b(\tau_1)}{B_{\tau_1}} \right] (\tau_1 - \tau_0) \\ &= B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[B_{\tau_1}^{-1} \left(\frac{1}{\tau_1 - \tau_0} \left(\exp \left(\int_{\tau_0}^{\tau_1} r_s ds \right) - 1 \right) - K \right)^+ \right] (\tau_1 - \tau_0) \end{aligned} \quad (3.10)$$

とかけることに注意する。ここで、

$$I_{u,v} := \int_u^v r_s ds$$

とすると、(3.10) 式は、

$$\begin{aligned} V_{cpl}^b(t) &= B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[B_{\tau_1}^{-1} \left(\frac{1}{\tau_1 - \tau_0} (e^{I_{\tau_0, \tau_1}} - 1) - K \right)^+ \right] (\tau_1 - \tau_0) \\ &= \frac{B_t}{\tau_1 - \tau_0} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[B_{\tau_1}^{-1} (e^{I_{\tau_0, \tau_1}} - \tilde{K})^+ \right] (\tau_1 - \tau_0) \\ &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_{t, \tau_1}} (e^{I_{\tau_0, \tau_1}} - \tilde{K})^+ \right] \\ &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_{t, \tau_1}} \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[(e^{I_{\tau_0, \tau_1}} - \tilde{K})^+ \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_{t, \tau_0}} \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_{\tau_0, \tau_1}} (e^{I_{\tau_0, \tau_1}} - \tilde{K})^+ \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_{t, \tau_0}} V_{cpl}^b(\tau_0) \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

となる。ただし、 $\tilde{K} := 1 + (\tau_1 - \tau_0)K$ としている。

最初に、 $V_{cpl}^b(\tau_0) = \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_{\tau_0, \tau_1}} (e^{I_{\tau_0, \tau_1}} - \tilde{K})^+ \right]$ を評価する。

具体的な手順に先立って、この後の方針について説明する。まず、 $V_{cpl}^b(\tau_0)$ を (3.13) 式で定義される関数 G で表す。その関数 G をフーリエ・ステイルチェス変換し、変換後の関数を $\hat{G}_t(\xi; T, \alpha)$ とする。アフィン構造を仮定しているので、 $\hat{G}_t(\xi; T, \alpha)$ は

$$\hat{G}_t(\xi; T, \alpha) = \exp(A(t, T; \alpha + i\xi)x_t + B(t, T; \alpha + i\xi)y_t + C(t, T; \alpha + i\xi))$$

とかけることが知られている。よって、 $A(t, T; \alpha + i\xi), B(t, T; \alpha + i\xi), C(t, T; \alpha + i\xi)$ を求めることで、フーリエ逆変換を通して、

$$V_{cpl}^b(\tau_0) = \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_{\tau_0, \tau_1}} (e^{I_{\tau_0, \tau_1}} - \tilde{K})^+ \right] \quad (3.12)$$

を評価する。

命題 3.3.1. 関数 G を以下のように定義する。

$$G_t(\beta; T, \alpha) := \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{\alpha I_{t, T}} \mathbf{1}_{\{I_{t, T} - \beta \geq 0\}} \right] \quad (3.13)$$

このとき、(3.11) 式は

$$V_{cpl}^b(t) = \left(\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_t, \tau_0} G_{\tau_0}(\tilde{k}; \tau_1, 0) \right] - \tilde{K} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_t, \tau_0} G_{\tau_0}(\tilde{k}; \tau_1, -1) \right] \right) \quad (3.14)$$

となる。ただし、 $\tilde{k} := \ln \tilde{K}$ とする。

Proof. 証明は補論 B.1 節に記載する。 \square

命題 3.3.2. 関数 G をフーリエ・スティルチェス変換し、

$$\hat{G}_t(\xi; T, \alpha) := \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\beta} \frac{d}{d\beta} G_t(\beta; T, \alpha) d\beta \quad (3.15)$$

とすると、 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\hat{G}_t(\xi; T, \alpha) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{(\alpha+i\xi)I_{t,T}} \right] \quad (3.16)$$

となる。

Proof. 証明は補論 B.2 節に記載する。 \square

さらに、関数 $\hat{G}_t(\xi; T, \alpha)$ を一般化するため以下を定義する。

$$\bar{G}_t(\eta; T) := \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [e^{\eta I_{t,T}}] \quad (3.17)$$

ただし、 $\eta \in \mathbb{C}$ とする。このとき、 $\eta = \alpha + i\xi$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) とすれば、

$$\bar{G}_t(\eta; T) = \hat{G}_t(\xi; T, \alpha) \quad (3.18)$$

をみtasことは明らかである。ここで、

$$I_{t,T} = \int_t^T r_s ds$$

であり、また、

$$r_s = f(0, s) + x_s$$

であったので、(3.17) 式は

$$\begin{aligned} \bar{G}_t(\eta; T) &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [e^{\eta I_{t,T}}] \\ &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [e^{\eta \int_t^T (f(0,s) + x_s) ds}] \end{aligned} \quad (3.19)$$

となる。(3.9) 式で短期金利にアフィン構造を仮定していることより、

$$\begin{aligned} \bar{G}_t(\eta; T) &= \exp(A(t, T; \eta)x_t + B(t, T; \eta)y_t + C(t, T; \eta)) \\ &=: \psi(\eta, x_t, y_t, t, T) \end{aligned} \quad (3.20)$$

とかけることが知られている。ただし、 $A(t, T; \eta), B(t, T; \eta), C(t, T; \eta)$ は確定的関数である。関数 G は関数 \hat{G} をフーリエ逆変換し積分すれば求まるので、(3.15) 式、(3.20) 式より

$$\begin{aligned} G_t(\beta; T, \alpha) &= \int_{-\infty}^{\beta} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi\gamma} \hat{G}(\xi; T, \alpha) d\xi \right) d\gamma \\ &= \int_{-\infty}^{\beta} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi\gamma} \bar{G}(\alpha + i\xi; T) d\xi \right) d\gamma \\ &= \int_{-\infty}^{\beta} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi\gamma} \psi(\alpha + i\xi, x_t, y_t, t, T) d\xi \right) d\gamma \\ &=: \hat{\mathcal{F}}^{-1}(\psi(\alpha + i\xi, x_t, y_t, t, T))(\beta) \end{aligned} \quad (3.21)$$

となる。(3.21) 式を具体的に計算することで (3.14) 式が求まる。関数 ψ の具体的な導出は次節に記載する。

最後に、これらの結果を (3.14) 式

$$V_{cpl}^b(t) = \left(\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_t, \tau_0} G_{\tau_0}(\tilde{k}; \tau_1, 0) \right] - \tilde{K} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_t, \tau_0} G_{\tau_0}(\tilde{k}; \tau_1, -1) \right] \right) \quad (3.22)$$

に代入して caplet 価格を評価するために関数 H を定義する。

$$H_t(s, T; \alpha, \beta) := \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_t, s} G_s(\beta; T, \alpha) \right] \quad (3.23)$$

ただし、 $t \leq s$ とする。このとき、関数 H は (3.21) 式より、

$$H_t(s, T; \alpha, \beta) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_t, s} \hat{\mathcal{F}}^{-1}(\psi(\alpha + i\xi, x_s, y_s, s, T))(\beta) \right] \quad (3.24)$$

とかける。なお、作用素 $\hat{\mathcal{F}}^{-1}$ は実数倍に対し線形であることに注意すれば、

$$H_t(s, T; \alpha, \beta) = \hat{\mathcal{F}}^{-1}(\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [e^{-I_t, s} \psi(\alpha + i\xi, x_s, y_s, s, T)(\beta)]) \quad (3.25)$$

となる。(3.20) 式より

$$\begin{aligned} H_t(s, T; \alpha, \beta) &= \hat{\mathcal{F}}^{-1} \left(\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [e^{-I_t, s} \psi(\alpha + i\xi, x_s, y_s, s, T)] \right) (\beta) \\ &= \hat{\mathcal{F}}^{-1} \left(\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [\exp(-I_{t,s} + A(s, T; \alpha + i\xi)x_s + B(s, T; \alpha + i\xi)y_s + C(s, T; \alpha + i\xi))] \right) (\beta) \\ &= \hat{\mathcal{F}}^{-1} \left(\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [\exp(-I_{t,s} + ax_s + by_s + c) |_{a=A(s, T; \alpha + i\xi), b=B(s, T; \alpha + i\xi), c=C(s, T; \alpha + i\xi)}] \right) (\beta) \end{aligned} \quad (3.26)$$

となる。短期金利にアフィン構造を仮定しているので、(3.20) 式と同様に、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} [e^{ax_s + by_s + c + dI_{t,s}}] &= \exp(\tilde{A}(t, s; a, b, c, d)x_t + \tilde{B}(t, s; a, b, c, d)y_t \\ &\quad + \tilde{C}(t, s; a, b, c, d) + \tilde{D}(t, s; a, b, c, d)I_{t,t}) \\ &= \exp(\tilde{A}(t, s; a, b, c, d)x_t + \tilde{B}(t, s; a, b, c, d)y_t + \tilde{C}(t, s; a, b, c, d)) \\ &=: \phi(a, b, c, d, x_t, y_t, t, s) \end{aligned} \quad (3.27)$$

とかける。ただし、 $\tilde{A}(t, s; a, b, c, d)$, $\tilde{B}(t, s; a, b, c, d)$, $\tilde{C}(t, s; a, b, c, d)$, $\tilde{D}(t, s; a, b, c, d)$ は確定的関数であり、また、 $I_{t,t} = 0$ を用いた。

よって、(3.26) 式、(3.27) 式より

$$H_t(s, T; \alpha, \beta) = \hat{\mathcal{F}}^{-1} \left(\phi(a, b, c, d, x_t, y_t, t, s)_{a=A(s, T; \alpha + i\xi), b=B(s, T; \alpha + i\xi), c=C(s, T; \alpha + i\xi)} \right) (\beta) \quad (3.28)$$

となる。関数 ϕ の具体的な計算は次節に記載する。

以上より、backward looking caplet の評価は以下ようになる。

定理 3.3.3 (backward looking caplet 評価式).

$$\begin{aligned} V_{cpl}^b(t) &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_t, \tau_0} \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_{\tau_0, \tau_1}} \left(e^{I_{\tau_0, \tau_1}} - \tilde{K} \right)^+ \right] \right] \\ &= \hat{\mathcal{F}}^{-1}(\Phi_0(\xi) - \tilde{K}\Phi_{-1}(\xi))(\beta) |_{\beta=\tilde{k}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

ただし、

$$\Phi_\alpha(\xi) := \phi(a, b, c, d, x_t, y_t, t, s) \Big|_{a=A(\tau_0, \tau_1; \alpha+i\xi), b=B(\tau_0, \tau_1; \alpha+i\xi), c=C(\tau_0, \tau_1; \alpha+i\xi), d=-1} \quad (3.30)$$

とする。

なお、作用素 $\hat{\mathcal{F}}^{-1}$ について、Duffie, Pan and Singleton (2000) では、

$$\hat{\mathcal{F}}^{-1}(\psi(\alpha + i\xi, x_t, y_t, t, T))(\beta) = \frac{1}{2}\psi(\alpha, x_t, y_t, T) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} \text{Im}(e^{-i\xi\beta} \psi(\alpha + i\xi, x_t, y_t, t, T)) d\xi \quad (3.31)$$

という結果を用いている。(3.31) 式を (3.29) 式に適用し、backward looking caplet の価格を得る。

本節の最後に、floorlet についても同様のアプローチを適用することが可能である点について、留意しておく。

3.4 微分方程式による表現

本節では、関数 ψ および関数 ϕ を具体的に求める。以下で示すように、関数 ψ を一般化した関数が関数 ϕ であるので、関数 ϕ を求めれば十分である。

関数 ψ は、(3.17) 式、(3.20) 式より、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[e^{\eta I_{t,T}}] &= \psi(\eta, x_t, y_t, t, T) \\ &= \exp(A(t, T; \eta)x_t + B(t, T; \eta)y_t + C(t, T; \eta)) \end{aligned} \quad (3.32)$$

であり、関数 ϕ は (3.27) 式より、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[e^{ax_s + by_s + c + dI_{t,s}}] &= \phi(a, b, c, d, x_t, y_t, t, s) \\ &= \exp(\tilde{A}(t, s; a, b, c, d)x_t + \tilde{B}(t, s; a, b, c, d)y_t + \tilde{C}(t, s; a, b, c, d)) \end{aligned} \quad (3.33)$$

であった。(3.32) 式と (3.33) 式より、(3.33) 式の左辺において、 $a = b = c = 0$ かつ $d = \eta$ の場合が (3.32) 式の左辺と一致する。よって、関数 ϕ を求めれば十分であることが示せた。

以下、関数 ϕ を具体的に求める。

(3.27) 式とファインマン・カッツの定理より、

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_t - (-d \times r(x, t)))\phi(a, b, c, d, x, y, t, s) &= 0 \\ \phi(a, b, c, d, x, y, s, s) &= e^{ax+by+c} \end{aligned} \quad (3.34)$$

を得る。ただし、

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t &= \frac{\partial}{\partial t} + (y - \kappa(t)x) \frac{\partial}{\partial x} + ((g_0(t) + g_1(t)x + g_2(t)y) - 2\kappa(t)y) \frac{\partial}{\partial y} \\ &\quad + \frac{1}{2}(g_0(t) + g_1(t)x + g_2(t)y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

とした。(3.34) 式より、 $t = s$ のとき、

$$\begin{aligned}\tilde{A}(s, s; a, b, c, d) &= a \\ \tilde{B}(s, s; a, b, c, d) &= b \\ \tilde{C}(s, s; a, b, c, d) &= c\end{aligned}\tag{3.36}$$

であることがわかる。さらに、(3.34) 式より、

$$\begin{aligned}(\tilde{A}'(t, s; a, b, c, d)x_t + \tilde{B}'(t, s; a, b, c, d)y + \tilde{C}'(t, s; a, b, c, d))\phi \\ + (y_t - \kappa(t)x)\tilde{A}(t, s; a, b, c, d)\phi \\ + ((g_0(t) + g_1(t)x + g_2(t)y) - 2\kappa(t)y)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d)\phi \\ + \frac{1}{2}(g_0(t) + g_1(t)x_t + g_2(t)y)\tilde{A}^2(t, s; a, b, c, d)\phi \\ = -d \times r(t, x)\phi\end{aligned}\tag{3.37}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned}\tilde{A}'(t, s; a, b, c, d) &:= \frac{d}{dt}\tilde{A}(t, s; a, b, c, d) \\ \tilde{B}'(t, s; a, b, c, d) &:= \frac{d}{dt}\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) \\ \tilde{C}'(t, s; a, b, c, d) &:= \frac{d}{dt}\tilde{C}(t, s; a, b, c, d)\end{aligned}\tag{3.38}$$

とした。したがって、(3.37) 式に $r(t, x) = f(0, t) + x$ を代入し整理すると、

$$\begin{aligned}\tilde{C}'(t, s; a, b, c, d) + g_0(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) + \frac{1}{2}g_0(t)\tilde{A}^2(t, s; a, b, c, d) + d \times f(0, t) \\ + \left(\tilde{A}'(t, s; a, b, c, d) - \kappa(t)\tilde{A}(t, s; a, b, c, d) + g_1(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}g_1(t)\tilde{A}^2(t, s; a, b, c, d) + d\right)x \\ + \left(\tilde{B}'(t, s; a, b, c, d) + \tilde{A}(t, s; a, b, c, d) + g_2(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) \right. \\ \left. - 2\kappa(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) + \frac{1}{2}g_2(t)\tilde{A}^2(t, s; a, b, c, d)\right)y \\ = 0\end{aligned}\tag{3.39}$$

となる。任意の x, y に対して、(3.39) 式は成り立つので

$$\begin{aligned}\tilde{A}'(t, s; a, b, c, d) - \kappa(t)\tilde{A}(t, s; a, b, c, d) + g_1(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) \\ + \frac{1}{2}g_1(t)\tilde{A}^2(t, s; a, b, c, d) + d = 0 \\ \tilde{B}'(t, s; a, b, c, d) + \tilde{A}(t, s; a, b, c, d) + g_2(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) \\ - 2\kappa(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) + \frac{1}{2}g_2(t)\tilde{A}^2(t, s; a, b, c, d) = 0 \\ \tilde{C}'(t, s; a, b, c, d) + g_0(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) + \frac{1}{2}g_0(t)\tilde{A}^2(t, s; a, b, c, d) + df(0, t) = 0\end{aligned}\tag{3.40}$$

となる。(3.40) 式を解くことで関数 $\tilde{A}(t, s; a, b, c, d)$, $\tilde{B}(t, s; a, b, c, d)$, $\tilde{C}(t, s; a, b, c, d)$ を求め、(3.27) 式と定理 3.3.3 より、caplet の評価を行う。なお 4 章の数値検証では、(3.40) 式を Runge-Kutta 法により数値的に解いた上で、(3.31) 式のフーリエ逆変換も数値積分を用いて評価している。

なお、ボラティリティが定数もしくは確定的関数の場合、以下の命題が成立する*。

命題 3.4.1. $g_1(t) = g_2(t) = 0$ 、つまり、

$$\sigma_r(t, x, y)^2 = g_0(t) \quad (3.41)$$

の場合、(3.40) 式は

$$\begin{aligned} \tilde{A}'(t, s; a, b, c, d) - \kappa(t)\tilde{A}(t, s; a, b, c, d) + d &= 0 \\ \tilde{B}'(t, s; a, b, c, d) + \tilde{A}(t, s; a, b, c, d) - 2\kappa(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) &= 0 \\ \tilde{C}'(t, s; a, b, c, d) + g_0(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) + \frac{1}{2}g_0(t)\tilde{A}^2(t, s; a, b, c, d) + d \times f(0, t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

となる。この常微分方程式を解くと、

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t, s; a, b, c, d) &= d \int_t^s \exp\left(-\int_t^v \kappa(x)dx\right) dv + a \times \exp\left(-\int_u^s \kappa(x)dx\right) \\ \tilde{B}(t, s; a, b, c, d) &= \int_t^s \tilde{A}(v, s; a, b, c, d) \exp\left(-\int_t^v 2\kappa(x)dx\right) dv + b \times \exp\left(-\int_t^s 2\kappa(x)dx\right) \\ \tilde{C}(t, s; a, b, c, d) &= \int_t^s g_0(v)\tilde{B}(v, s; a, b, c, d)dv \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_t^s g_0(v)\tilde{A}^2(v, s; a, b, c, d)dv + d \int_t^s f(0, v)dv \end{aligned} \quad (3.43)$$

となる。

Proof. 証明は補論 C.3 節に記載する。 □

*注意 3.1.4 で記載した Gaussian 短期金利モデルの場合に相当する。

第4章 数値検証

この章では、3章で提案したモデルを用いた caplet 価格の数値検証の結果について報告する。4.1節では、数値検証の前提を設定し、4.2節では、3章で示した方法、つまり、定理 3.3.3 で示された caplet の評価に必要な微分方程式を Runge-Kutta 法を用いて数値的に解き、その後、フーリエ逆変換に対して数値積分を行い caplet を評価した場合 (以下、3章の方法に対する数値解法)、4.3節では、(3.10) 式の表現に対して直接モンテカルロシミュレーションを使用した場合についての数値検証の結果を報告する。4.4節では、両者の結果を比較し、その差の要因について分析を行う。

4.1 数値検証の設定

本節では、backward looking caplet の価格評価のため金利、ボラティリティについて設定する。

4.1.1 金利の設定

日本の営業日基準で金利参照期間を定めることにする。1年間の営業日を 261 日とし、6か月間の営業日を 131 日、3か月間の営業日を 66 日とする。評価時点を $t = 0$ (現在) とし、caplet の金利参照期間は現在から 65 日後 (3か月後) に開始し、131 日後 (6か月後) に金利参照期間を終えらる。定義 2.1.5 において導入した金利参照期間の記号を用いると、 $\tau_0 = \frac{65}{261}$, $\tau_1 = \frac{131}{261}$ である。また、Quasi-Gaussian モデルを定義した、定義 3.1.3 におけるフォワードレートの初期の期間構造は、2022 年 4 月 1 日時点の残存期間 3 か月と 6 か月の JGB のデータを使用した。3 か月と 6 か月の JGB のデータを線形に補間・補外しその傾きを求めることで、フォワードレートの初期の期間構造は、 $f(0, t) = -0.00057341$ ($t \leq \tau_1$) と定めた。

4.1.2 Quasi-Gaussian モデルのパラメータ設定

(3.9) 式で定義した確定的関数 $g_0(t), g_1(t), g_2(t)$ に関して、数値検証に必要な離散的時刻 $t_n = \frac{n}{261}$ ($1 \leq n \leq 131$) での値を以下の通り与える。本章の検証では、インプライドボラティリティ (以下、IV) が (1) フラットの場合、(2) スキューを持つ場合の二通り実施した。まず、(1) の場合、

$$\begin{aligned}g_0(t_n) &= 0.009 + 0.00001 \times (t_n \times 261) \\g_1(t_n) &= 0.01 + 0.00001 \times (t_n \times 261) \\g_2(t_n) &= 0.01 + 0.00001 \times (t_n \times 261)\end{aligned}\tag{4.1}$$

とする。次に、(2) の場合、

$$\begin{aligned}g_0(t_n) &= 0.00901 \\g_1(t_n) &= 0.09 \\g_2(t_n) &= 0.09\end{aligned}\tag{4.2}$$

定数で実施した。なお、3.2節で述べたように厳密には(3.9)式で定義される右辺は一般に非負であるとは限らないが、後に4.3節で見ると通り((3.9)式の右辺) < 0 となる確率が低い場合はこれを無視できるとした。

また、 $\kappa(t)$ は x_t の平均回帰の強さを制御するパラメータであり、 $\kappa(t) \equiv 1$ 、すなわち定数とした。

4.1.3 行使金利の設定

本節では、行使金利について設定する。以下の表4.1の通り、at-the-money(以下、ATM)、in-the-money(以下、ITM)をITM1とITM2の2種類、out-of-the-money(以下、OTM)をOTM1とOTM2の2種類、計5つの場合について評価した。

| 表 4.1: 行使金利の設定 | |
|----------------|------------|
| | 行使金利 |
| ATM | 0.0000298 |
| ITM1 | -0.0113174 |
| ITM2 | -0.0226646 |
| OTM1 | 0.0113800 |
| OTM2 | 0.0227242 |

4.2 3章の方法に対する数値解法

本節では、4.1節の設定のもと実施した backward looking caplet の数値解法について結果を報告する。

まず、3.4節で示した微分方程式を再掲する。

$$\begin{aligned}
& \tilde{A}'(t, s; a, b, c, d) - \kappa(t)\tilde{A}(t, s; a, b, c, d) + g_1(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) \\
& \quad + \frac{1}{2}g_1(t)\tilde{A}^2(t, s; a, b, c, d) + d = 0 \\
& \tilde{B}'(t, s; a, b, c, d) + \tilde{A}(t, s; a, b, c, d) + g_2(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) \\
& \quad - 2\kappa(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) + \frac{1}{2}g_2(t)\tilde{A}^2(t, s; a, b, c, d) = 0 \\
& \tilde{C}'(t, s; a, b, c, d) + g_0(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) + \frac{1}{2}g_0(t)\tilde{A}^2(t, s; a, b, c, d) + df(0, t) = 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

本節における検証では、(4.3)式を Runge-Kutta 法を用いて数値的に解くことで、 $\tilde{A}(t, s; a, b, c, d)$ 、 $\tilde{B}(t, s; a, b, c, d)$ 、 $\tilde{C}(t, s; a, b, c, d)$ を求めた。これらを定理 3.3.3 で示されたように

$$\begin{aligned}
V_{cpl}^b(t) &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-It, \tau_0} \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I\tau_0, \tau_1} \left(e^{I\tau_0, \tau_1} - \tilde{K} \right)^+ \right] \right] \\
&= \hat{\mathcal{F}}^{-1}(\Phi_0(\xi) - \tilde{K}\Phi_{-1}(\xi))(\beta)|_{\beta=\bar{k}}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

に代入して backward looking caplet を評価した。(3.31) 式の再掲になるが、作用素 $\hat{\mathcal{F}}^{-1}$ について、Duffie, Pan and Singleton (2000) と同様に、

$$\hat{\mathcal{F}}^{-1}(\psi(\alpha + i\xi, x_t, y_t, t, T))(\beta) = \frac{1}{2}\psi(\alpha, x_t, y_t, T) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \text{Im}(e^{-i\xi\beta} \psi(\alpha + i\xi, x_t, y_t, t, T)) d\xi \quad (4.5)$$

を用いた。この (4.5) 式を (4.4) 式に適用する際に数値積分 (シンプソン則を利用) を行った。また、Runge-Kutta 法で用いる時間の離散幅 (以下、時間の離散幅) は $(\tau_1 - \tau_0) \times 2^{-11} = 0.00012$ であり、数値積分で用いる積分区間の分割幅 (以下、積分の分割幅) は積分区間 $[0, \infty)$ を $[0, 400]$ で近似した上で $400 \times 2^{-13} = 0.04883$ とした。

表 4.2 は (1)IV がフラットの場合における結果を示している。

表 4.2: 3 章の方法に対する数値解法による caplet 価格と IV

| 行使金利 | caplet 価格 | IV |
|------|------------|--------|
| ATM | 0.00444620 | 6.330% |
| ITM1 | 0.00598785 | 6.298% |
| ITM2 | 0.00781369 | 6.266% |
| OTM1 | 0.00319262 | 6.361% |
| OTM2 | 0.00221315 | 6.392% |

ATM の場合に関して、時間の離散幅、積分の分割幅をそれぞれ変更し、影響を確認するため比較を行った。表 4.3 は、比較結果である。

表 4.3: 時間の離散幅と積分の分割幅をそれぞれ変化させた際の ATM における IV の比較

| | | 離散幅 | | | |
|-----------------------|----------|---------|---------|---------|---------|
| | | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
| 積 分 の 分 割 | 2^{13} | 6.327% | 6.323% | 6.316% | 6.300% |
| | 2^{12} | 6.326% | 6.322% | 6.314% | 6.299% |
| | 2^{11} | 6.323% | 6.319% | 6.311% | 6.296% |
| | 2^{10} | 6.317% | 6.314% | 6.306% | 6.290% |
| | 2^9 | 6.306% | 6.302% | 6.295% | 6.279% |

時間の離散幅、積分の分割幅それぞれ小さくなるにつれ、IV が大きくなる様子が確認できる。同様に、ITM1、ITM2、OTM1、OTM2 の場合について検証する。

ITM1 の場合の比較結果は表 4.4、ITM2 の場合の比較結果は表 4.5、OTM1 の場合の比較結果は表 4.6、OTM2 の場合の比較結果は表 4.7 に記載した。

いずれも、時間の離散幅、積分の分割幅それぞれが小さくなるにつれ、IV が大きくなる様子が確認できる。

次に、(2)IV がフラットの場合における ATM の結果表 4.8 に示す。

ATM の場合に関して、時間の離散幅、積分の分割幅をそれぞれ変更し、影響を確認するため比較を行った。表 4.9 は、比較結果である。

表 4.4: 時間の離散幅と積分の分割幅をそれぞれ変化させた際の ITM1 における IV の比較

| | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
|----------|---------|---------|---------|---------|
| 2^{13} | 6.296% | 6.292% | 6.284% | 6.269% |
| 2^{12} | 6.294% | 6.290% | 6.283% | 6.267% |
| 2^{11} | 6.286% | 6.285% | 6.280% | 6.264% |
| 2^{10} | 6.283% | 6.282% | 6.274% | 6.259% |
| 2^9 | 6.274% | 6.270% | 6.263% | 6.247% |

表 4.5: 時間の離散幅と積分の分割幅をそれぞれ変化させた際の ITM2 における IV の比較

| | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
|----------|---------|---------|---------|---------|
| 2^{13} | 6.264% | 6.260% | 6.253% | 6.237% |
| 2^{12} | 6.262% | 6.259% | 6.251% | 6.236% |
| 2^{11} | 6.259% | 6.256% | 6.248% | 6.233% |
| 2^{10} | 6.253% | 6.249% | 6.242% | 6.227% |
| 2^9 | 6.241% | 6.236% | 6.229% | 6.214% |

時間の離散幅、積分の分割幅それぞれ小さくなるにつれ、IV が大きくなる様子が確認できる。同様に、ITM1、ITM2、OTM1、OTM2 の場合について検証する。

ITM1 の場合の比較結果は表 4.10、ITM2 の場合の比較結果は表 4.11、OTM1 の場合の比較結果は表 4.12、OTM2 の場合の比較結果は表 4.13 に記載した。

いずれも、時間の離散幅、積分の分割幅それぞれが小さくなるにつれ、IV が大きくなる様子が確認できる。

表 4.6: 時間の離散幅と積分の分割幅をそれぞれ変化させた際の OTM1 における IV の比較

| | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
|----------|---------|---------|---------|---------|
| 2^{13} | 6.359% | 6.355% | 6.347% | 6.331% |
| 2^{12} | 6.357% | 6.353% | 6.346% | 6.330% |
| 2^{11} | 6.352% | 6.350% | 6.343% | 6.327% |
| 2^{10} | 6.347% | 6.345% | 6.337% | 6.321% |
| 2^9 | 6.337% | 6.333% | 6.325% | 6.310% |

表 4.7: 時間の離散幅と積分の分割幅をそれぞれ変化させた際の OTM2 における IV の比較

| | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
|----------|---------|---------|---------|---------|
| 2^{13} | 6.390% | 6.386% | 6.378% | 6.363% |
| 2^{12} | 6.389% | 6.381% | 6.377% | 6.361% |
| 2^{11} | 6.381% | 6.379% | 6.374% | 6.358% |
| 2^{10} | 6.379% | 6.375% | 6.364% | 6.352% |
| 2^9 | 6.366% | 6.362% | 6.354% | 6.339% |

表 4.8: 3 章の方法に対する数値解法による caplet 価格と IV

| 行使金利 | caplet 価格 | IV |
|------|------------|--------|
| ITM2 | 0.00760547 | 5.853% |
| ITM1 | 0.00587090 | 6.094% |
| ATM | 0.00444024 | 6.312% |
| OTM1 | 0.00330207 | 6.515% |
| OTM2 | 0.00241189 | 6.724% |

表 4.9: 時間の離散幅と積分の分割幅をそれぞれ変化させた際の ATM における IV の比較

| | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
|----------|---------|---------|---------|---------|
| 2^{13} | 6.312% | 6.309% | 6.301% | 6.286% |
| 2^{12} | 6.311% | 6.308% | 6.299% | 6.284% |
| 2^{11} | 6.308% | 6.306% | 6.296% | 6.280% |
| 2^{10} | 6.302% | 6.300% | 6.288% | 6.271% |
| 2^9 | 6.292% | 6.290% | 6.278% | 6.261% |

表 4.10: 時間の離散幅と積分の分割幅をそれぞれ変化させた際の ITM1 における IV の比較

| | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
|----------|---------|---------|---------|---------|
| 2^{13} | 6.099% | 6.095% | 6.088% | 6.073% |
| 2^{12} | 6.097% | 6.094% | 6.087% | 6.072% |
| 2^{11} | 6.093% | 6.090% | 6.083% | 6.069% |
| 2^{10} | 6.088% | 6.084% | 6.077% | 6.064% |
| 2^9 | 6.078% | 6.073% | 6.068% | 6.053% |

表 4.11: 時間の離散幅と積分の分割幅をそれぞれ変化させた際の ITM2 における IV の比較

| | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
|----------|---------|---------|---------|---------|
| 2^{13} | 5.861% | 5.857% | 5.850% | 5.835% |
| 2^{12} | 5.860% | 5.855% | 5.849% | 5.834% |
| 2^{11} | 5.857% | 5.851% | 6.845% | 5.831% |
| 2^{10} | 5.851% | 5.844% | 6.838% | 5.825% |
| 2^9 | 5.841% | 5.834% | 6.827% | 5.815% |

表 4.12: 時間の離散幅と積分の分割幅をそれぞれ変化させた際の OTM1 における IV の比較

| | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
|----------|---------|---------|---------|---------|
| 2^{13} | 6.515% | 6.512% | 6.504% | 6.488% |
| 2^{12} | 6.514% | 6.511% | 6.503% | 6.487% |
| 2^{11} | 6.512% | 6.508% | 6.500% | 6.484% |
| 2^{10} | 6.507% | 6.502% | 6.493% | 6.479% |
| 2^9 | 6.497% | 6.492% | 6.482% | 6.469% |

表 4.13: 時間の離散幅と積分の分割幅をそれぞれ変化させた際の OTM2 における IV の比較

| | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
|----------|---------|---------|---------|---------|
| 2^{13} | 6.724% | 6.720% | 6.712% | 6.695% |
| 2^{12} | 6.723% | 6.719% | 6.711% | 6.693% |
| 2^{11} | 6.722% | 6.718% | 6.710% | 6.989% |
| 2^{10} | 6.718% | 6.713% | 6.704% | 6.683% |
| 2^9 | 6.707% | 6.702% | 6.691% | 6.671% |

4.3 モンテカルロシミュレーション

本節では、(3.8) 式、(3.10) 式の表現に対して直接モンテカルロシミュレーションを使用した場合の結果を報告する。

本節で実施したモンテカルロシミュレーションでは、パス数 8,000,000 を基準としている。また、(3.8) 式の離散化（オイラー・丸山法）における離散幅を $0.00012 = \frac{1}{8352} = \frac{1}{32 \times 261}$ とした。

まずは(1)IVがフラットの場合、金利参照期間の開始日から終了日までの間に((3.9)式の右辺) < 0 となるか確認した。図 4.1 は 8,000,000 のパスのうち、最も小さい値となる $\sigma_r^2(t, x, y)$ を t ごとにプロットした様子である。図 4.1 より今回のパラメーターの下では、((3.9)式の右辺) < 0 となら



図 4.1: 8,000,000 のパスのうち、最も小さい値となる ((3.9) 式の右辺) の値

ないと判断した。

表 4.14 は、(1)IV がフラットの場合におけるモンテカルロシミュレーションで評価した caplet 価格と IV の結果である。

表 4.14: モンテカルロシミュレーションによる caplet 価格と IV

| 行使金利 | caplet 価格 | IV |
|------|------------|--------|
| ATM | 0.00444237 | 6.330% |
| ITM1 | 0.00598370 | 6.298% |
| ITM2 | 0.00780945 | 6.266% |
| OTM1 | 0.00318942 | 6.361% |
| OTM2 | 0.00221092 | 6.392% |

また、ATM の場合において、パス数の変更とオイラー・丸山法における離散化の離散幅の変更し、その影響を確認するため比較を行った。結果を表 4.15 に記載する。

パス数によって、IV は大きく変化しない様子が見られる。また、オイラー・丸山法における離散化の離散幅が小さくなるにつれて IV は大きくなる。

表 4.15: パス数と離散幅の変更をそれぞれさせた際の ATM における IV の比較

| | | 離散幅 | | | |
|---|-----------|---------|---------|---------|---------|
| | | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
| パ | 8,000,000 | 6.330% | 6.326% | 6.308% | 6.274% |
| ス | 4,000,000 | 6.325% | 6.324% | 6.311% | 6.272% |
| 数 | 2,000,000 | 6.326% | 6.329% | 6.313% | 6.282% |
| | 1,000,000 | 6.326% | 6.320% | 6.306% | 6.284% |

同様にして、ITM1、ITM2、OTM1、OTM2 の場合について検証する。
 まず、ITM1 の場合において、結果を表 4.16 に記載する。

表 4.16: パス数と離散幅の変更をそれぞれさせた際の ITM1 における IV の比較

| | | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
|--|-----------|---------|---------|---------|---------|
| | 8,000,000 | 6.298% | 6.301% | 6.278% | 6.239% |
| | 4,000,000 | 6.292% | 6.292% | 6.287% | 6.240% |
| | 2,000,000 | 6.294% | 6.298% | 6.291% | 6.250% |
| | 1,000,000 | 6.293% | 6.288% | 6.271% | 6.253% |

次に、ITM2 の場合において、結果を表 4.17 に記載する。

表 4.17: パス数と離散幅の変更をそれぞれさせた際の ITM2 における IV の比較

| | | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
|--|-----------|---------|---------|---------|---------|
| | 8,000,000 | 6.266% | 6.273% | 6.247% | 6.204% |
| | 4,000,000 | 6.259% | 6.270% | 6.256% | 6.207% |
| | 2,000,000 | 6.261% | 6.268% | 6.262% | 6.218% |
| | 1,000,000 | 6.261% | 6.256% | 6.238% | 6.222% |

続いて、OTM1 の場合において、結果を表 4.18 に記載する。

最後に、OTM2 の場合において、結果を表 4.19 に記載する。

いずれも、パス数によって、IV は大きく変化しない様子が見られる。また、オイラー・丸山法における離散化の離散幅が小さくなるにつれて IV は大きくなる。

次に、(2)IV がスキューを持つ場合、金利参照期間の開始日から終了日までの間に ((3.9) 式の右辺) < 0 となるか確認した。図 4.2 は 8,000,000 のパスのうち、最も小さい値となる $\sigma_r^2(t, x, y)$ を t ごとにプロットした様子である。図 4.2 より今回のパラメーターの下では、((3.9) 式の右辺) < 0 とならないと判断した。

表 4.20 は、(2)IV がスキューを持つ場合におけるモンテカルロシミュレーションで評価した caplet 価格と IV の結果である。

また、ATM の場合において、パス数の変更とオイラー・丸山法における離散化の離散幅の変更し、その影響を確認するため比較を行った。結果を表 4.21 に記載する。

パス数によって、IV は大きく変化しない様子が見られる。また、オイラー・丸山法における離散化の離散幅が小さくなるにつれて IV は大きくなる。

同様にして、ITM1、ITM2、OTM1、OTM2 の場合について検証する。

まず、ITM1 の場合において、結果を表 4.22 に記載する。

次に、ITM2 の場合において、結果を表 4.23 に記載する。

表 4.18: パス数と離散幅の変更をそれぞれさせた際の OTM1 における IV の比較

| | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
|-----------|---------|---------|---------|---------|
| 8,000,000 | 6.361% | 6.363% | 6.339% | 6.316% |
| 4,000,000 | 6.357% | 6.357% | 6.348% | 6.305% |
| 2,000,000 | 6.358% | 6.360% | 6.351% | 6.313% |
| 1,000,000 | 6.358% | 6.352% | 6.336% | 6.222% |

表 4.19: パス数と離散幅の変更をそれぞれさせた際の OTM2 における IV の比較

| | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
|-----------|---------|---------|---------|---------|
| 8,000,000 | 6.392% | 6.395% | 6.369% | 6.340% |
| 4,000,000 | 6.389% | 6.388% | 6.379% | 6.338% |
| 2,000,000 | 6.389% | 6.391% | 6.381% | 6.344% |
| 1,000,000 | 6.389% | 6.384% | 6.368% | 6.347% |

続いて、OTM1 の場合において、結果を表 4.24 に記載する。

最後に、OTM2 の場合において、結果を表 4.25 に記載する。いずれも、パス数によって、IV は大きく変化しない様子が見られる。また、オイラー・丸山法における離散化の離散幅が小さくなるにつれて IV は大きくなる。

最後に、モンテカルロシミュレーションのパス数変更による推定された IV の統計量を表 4.26 に記載する。ただし、数値例 (1) は IV がフラットである場合、数値例 (2) は IV がスキューを持つ場合とする。両者とも推定値の分布する幅がパス数を減らすにつれて大きくなり、数値例 (2) では、1,000,000 本の場合 IV に対して 1% 程度の誤差が生じ得る可能性を示唆している。

表 4.20: モンテカルロシミュレーションによる caplet 価格と IV

| 行使金利 | caplet 価格 | IV |
|------|------------|--------|
| ITM2 | 0.00760547 | 5.853% |
| ITM1 | 0.00587090 | 6.094% |
| ATM | 0.00444024 | 6.312% |
| OTM1 | 0.00330207 | 6.515% |
| OTM2 | 0.00241189 | 6.724% |



図 4.2: 8,000,000 のパスのうち、最も小さい値となる ((3.9) 式の右辺) の値

表 4.21: パス数と離散幅の変更をそれぞれさせた際の ATM における IV の比較

| | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
|-----------|---------|---------|---------|---------|
| 8,000,000 | 6.319% | 6.306% | 6.290% | 6.270% |
| 4,000,000 | 6.313% | 6.307% | 6.287% | 6.271% |
| 2,000,000 | 6.304% | 6.311% | 6.287% | 6.272% |
| 1,000,000 | 6.306% | 6.312% | 6.308% | 6.274% |

表 4.22: パス数と離散幅の変更をそれぞれさせた際の ITM1 における IV の比較

| | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
|-----------|---------|---------|---------|---------|
| 8,000,000 | 6.094% | 6.079% | 6.063% | 6.043% |
| 4,000,000 | 6.086% | 6.081% | 6.060% | 6.044% |
| 2,000,000 | 6.077% | 6.086% | 6.059% | 6.049% |
| 1,000,000 | 6.080% | 6.086% | 6.078% | 6.046% |

表 4.23: パス数と離散幅の変更をそれぞれさせた際の ITM2 における IV の比較

| | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
|-----------|---------|---------|---------|---------|
| 8,000,000 | 5.853% | 5.838% | 5.819% | 5.800% |
| 4,000,000 | 5.843% | 5.841% | 5.817% | 5.801% |
| 2,000,000 | 5.832% | 5.847% | 5.816% | 5.806% |
| 1,000,000 | 5.835% | 5.847% | 5.838% | 5.803% |

表 4.24: パス数と離散幅の変更をそれぞれさせた際の OTM1 における IV の比較

| | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
|-----------|---------|---------|---------|---------|
| 8,000,000 | 6.522% | 6.518% | 6.503% | 6.483% |
| 4,000,000 | 6.525% | 6.519% | 6.500% | 6.484% |
| 2,000,000 | 6.517% | 6.523% | 6.500% | 6.490% |
| 1,000,000 | 6.519% | 6.525% | 6.516% | 6.486% |

表 4.25: パス数と離散幅の変更をそれぞれさせた際の OTM2 における IV の比較

| | 0.00012 | 0.00024 | 0.00048 | 0.00096 |
|-----------|---------|---------|---------|---------|
| 8,000,000 | 6.732% | 6.721% | 6.707% | 6.684% |
| 4,000,000 | 6.727% | 6.721% | 6.702% | 6.686% |
| 2,000,000 | 6.720% | 6.726% | 6.703% | 6.692% |
| 1,000,000 | 6.722% | 6.727% | 6.717% | 6.688% |

表 4.26: モンテカルロシミュレーションにより推定された IV の統計量

| パス数 | | 離散幅 (0.00024) | | | | | |
|-----------|------|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | | 数値例 (1) | | | 数値例 (2) | | |
| | | ITM2 | ATM | OTM2 | ITM2 | ATM | OTM2 |
| 8,000,000 | 95%点 | 6.2728% | 6.3273% | 6.3953% | 5.8622% | 6.3155% | 6.7286% |
| | 5%点 | 6.2590% | 6.3182% | 6.3874% | 5.8475% | 6.3045% | 6.7192% |
| | 標準偏差 | 0.0046% | 0.0032% | 0.0027% | 0.0041% | 0.0031% | 0.0027% |
| 4,000,000 | 95%点 | 6.2777% | 6.3302% | 6.3973% | 5.8670% | 6.3183% | 6.7310% |
| | 5%点 | 6.2546% | 6.3147% | 6.3838% | 5.8445% | 6.3021% | 6.7169% |
| | 標準偏差 | 0.0067% | 0.0047% | 0.0038% | 0.0069% | 0.0050% | 0.0045% |
| 2,000,000 | 95%点 | 6.2815% | 6.3341% | 6.3994% | 5.8708% | 6.3225% | 6.7356% |
| | 5%点 | 6.2489% | 6.3112% | 6.3818% | 5.8399% | 6.2981% | 6.7139% |
| | 標準偏差 | 0.0094% | 0.0065% | 0.0052% | 0.0101% | 0.0073% | 0.0063% |
| 1,000,000 | 95%点 | 6.2879% | 6.3397% | 6.4043% | 5.8799% | 6.3271% | 6.7381% |
| | 5%点 | 6.2455% | 6.3095% | 6.3796% | 5.8312% | 6.2914% | 6.7085% |
| | 標準偏差 | 0.0128% | 0.0088% | 0.0072% | 0.0151% | 0.0109% | 0.0093% |

4.4 比較結果

本節では、backward looking caplet の価格に対して、4.2 節で示した 数値解法による価格と 4.3 節で示したモンテカルロシミュレーションによる価格とそれぞれの IV を比較し、両者にどの程度の差があるか検証を行う。(1)IV がフラットな場合における結果を表 4.27 と表 4.28 に記載する。

表 4.27: 数値解法価格とモンテカルロシミュレーション価格の比較

| | 行使金利 | caplet 価格 (MC) | caplet 価格 (定理 1) | (MC)-(定理 1) |
|------|----------|----------------|------------------|-------------|
| ATM | 0.00003 | 0.00444237 | 0.00444620 | -0.00000383 |
| ITM1 | -0.01131 | 0.00598370 | 0.00598785 | -0.00000415 |
| ITM2 | -0.02262 | 0.00780945 | 0.00781369 | -0.00000424 |
| OTM1 | 0.01131 | 0.00318942 | 0.00319262 | -0.00000320 |
| OTM2 | 0.02262 | 0.00221092 | 0.00221315 | -0.00000223 |

表 4.28: 数値解法による IV とモンテカルロシミュレーションによる IV の比較

| | 行使金利 | IV (MC) | IV (定理 1) | (MC)-(定理 1) |
|------|----------|---------|-----------|-------------|
| ATM | 0.00003 | 6.330% | 6.327% | 0.003% |
| ITM1 | -0.01131 | 6.298% | 6.296% | 0.002% |
| ITM2 | -0.02262 | 6.266% | 6.264% | 0.002% |
| OTM1 | 0.01131 | 6.361% | 6.359% | 0.002% |
| OTM2 | 0.02262 | 6.392% | 6.390% | 0.002% |

次に、(2)IV がスキューを持つ場合における結果を表 4.29 と表 4.30 に記載する。

表 4.29: 数値解法価格とモンテカルロシミュレーション価格の比較

| | 行使金利 | caplet 価格 (MC) | caplet 価格 (定理 1) | (MC)-(定理 1) |
|------|----------|----------------|------------------|-------------|
| ITM2 | -0.02262 | 0.00760547 | 0.00761008 | -0.00000461 |
| ITM1 | -0.01311 | 0.00587090 | 0.00587489 | -0.00000399 |
| ATM | 0.00003 | 0.00444024 | 0.00443561 | 0.00000463 |
| OTM1 | 0.01131 | 0.00330207 | 0.00329932 | 0.00000274 |
| OTM2 | 0.02262 | 0.00241189 | 0.00240646 | 0.00000543 |

(1) および (2) において、3 章の方法に対する数値解法による価格とモンテカルロシミュレーションによる価格とそれぞれの IV の差は小さいことがわかるので、この結果を基準とする。3 章の方法に対する数値解法においては、4.2 で見たように、Runge-kutta の時間の離散幅と積分の分割幅を変更による影響に留意し、計算の高速化を行える。また、モンテカルロシミュレーションにおいては、4.3 節で見たように、オイラー・丸山法による時間の離散幅とモンテカルロシミュレーションのパス数に留意し、計算の高速化を行える。

表 4.30: 数値解法による IV とモンテカルロシミュレーションによる IV の比較

| | 行使金利 | IV (MC) | IV (定理 1) | (MC)-(定理 1) |
|------|----------|---------|-----------|-------------|
| ITM2 | -0.02262 | 5.853% | 5.861% | -0.008% |
| ITM1 | -0.01131 | 6.094% | 6.099% | -0.005% |
| ATM | 0.00003 | 6.319% | 6.312% | 0.007% |
| OTM1 | 0.01131 | 6.522% | 6.515% | 0.007% |
| OTM2 | 0.02262 | 6.732% | 6.724% | 0.008% |

第5章 おわりに

本論文では、まず、2章で Willems (2021) に沿って O/N RFR 複利の場合における caplet の評価について整理し、フォワード中立化法を用いた backward looking caplet の評価を与えた。

次に、3章では、3.1節で Quasi-Gaussian モデルを定義し、さらに3.2節で短期金利にアフィン構造を仮定することで、近似を用いる必要なく backward looking caplet の評価を実施した。短期金利にアフィン構造を仮定したことで、定理3.3.3で見られるように caplet の価格式を、(3.27)式で定義した関数 ϕ とそのフーリエ逆変換を用いて表現ができた。

4章では、3章で導出した caplet の評価式に対し、1) 前述の微分方程式を Runge-Kutta 法で解き、また、フーリエ逆変換を数値的に行う場合と、2) モデルに対しモンテカルロシミュレーションを実施した場合、この二通りで caplet の評価と (1)IV がフラットの場合、(2)IV がスキューを持つ場合における IV の評価を行った。さらに、計算の高速化の余地について検討をした。1) では、Runge-Kutta 法における時間の離散幅、積分の分割幅をそれぞれ変更の影響は、(1)IV がフラットの場合、(2)IV がスキューを持つ場合で同程度であったが、2) モンテカルロシミュレーションにおけるオイラー・丸山法の時間の離散幅、パス数を変更した場合の影響は (1)IV がフラットの場合、(2)IV がスキューを持つ場合で異なることが推測された。また、推定値の分布する幅がパス数を減らすにつれて大きくなるので留意が必要である。

今後の発展としては、本論文で提案したモデルを用いて市場の情報からキャリブレーションを行い、モデルのパラメータを求めることが挙げられる。市場から直接観測できないモデルのパラメータをキャリブレーションし金利オプションに対してクオートされる価格の補間に用いることを考えたい。また、本論文では、(3.8)式で記載した局所ボラティリティを主に扱ったが、注意3.1.5で記載した確率ボラティリティに拡張したモデルも興味深いと考える。局所ボラティリティは、時刻と原資産価格によりボラティリティを表現しているが、異なる時刻で求められたボラティリティ関数に一貫性がないという問題があり、キャリブレーションする際に留意が必要である。一方で、確率ボラティリティに拡張した場合、確率ボラティリティを表す変数が増えるので前述の問題を解決でき、かつキャリブレーション能力が向上すると期待できるためである。さらに、3章で提案した方法に関しては求積法や高速フーリエ変換などを行うこと、モンテカルロシミュレーションにおいては分散減少法などを行うことで計算の高速化の余地がある。

謝辞

本論文を執筆するにあたり、指導教員の竹原 浩太先生、吉羽 要直先生、室町 幸雄先生には手厚い指導と多くの有用な助言を頂きました。ここに深く感謝の意を表します。

補論 A SABR モデル

A.1 standard SABR モデル

Hagan *et al.* (2002) で知られる standard SABR モデルを紹介する。 R_t が以下の確率微分方程式に従うとき、これを standard SABR モデルとよぶ。

$$\begin{aligned}dR_t &= \sigma_t R_t^\beta dW_{1,t}, \\d\sigma_t &= \nu \sigma_t dW_{2,t},\end{aligned}\tag{A.1}$$

ただし、

$$\sigma_0 = \alpha > 0, \beta \in [0, 1], \nu > 0\tag{A.2}$$

であり、 $W_{1,t}, W_{2,t}$ は \mathbb{Q}^π に関するブラウン運動で、

$$dW_{1,t}dW_{2,t} = \rho dt, \rho \in [-1, 1]\tag{A.3}$$

とする。

A.2 dynamic SABR モデル

Hagan, Lesniewski and Woodward (2018) で知られる dynamic SABR モデルを紹介する。 R_t が以下の確率微分方程式に従うとき、これを dynamic SABR モデルとよぶ。

$$\begin{aligned}dR_t &= \bar{\lambda}(t) \sigma_t R_t^\beta dW_{1,t}, \\d\sigma_t &= \nu(t) \sigma_t dW_{2,t},\end{aligned}\tag{A.4}$$

ただし、 $\bar{\lambda}(t), \nu(t), \rho(t)$ は確定的関数で、

$$\sigma_0 = \alpha > 0, \beta \in [0, 1], \bar{\lambda}(t) > 0, \nu(t) > 0, \forall t \geq 0\tag{A.5}$$

であり、 $W_{1,t}, W_{2,t}$ は \mathbb{Q}^π に関するブラウン運動で、

$$dW_{1,t}dW_{2,t} = \rho(t)dt, \rho(t) \in [-1, 1], \forall t \geq 0\tag{A.6}$$

とする。

このとき、(A.4) 式に対する effective parameter は以下の通り与えられる。

$$\hat{\alpha} = \Delta e^{\frac{1}{4}\Delta^2\pi L}, \hat{\rho} = \frac{b}{\sqrt{c}}, \hat{\nu} = \Delta\sqrt{c}, \hat{\beta} = \beta\tag{A.7}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
\Delta^2 &= \frac{\int_0^{\tau_1} \bar{\lambda}^2(t) dt}{\tau_1} \\
b &= \frac{2}{\left(\int_0^{\tau_1} \bar{\lambda}^2(t) dt\right)^2} \int_0^{\tau_1} \left(\int_0^{\tau_1} \bar{\phi}^2(t) dt - \int_0^s \bar{\lambda}^2(t) dt \right) \rho(s) \nu(s) \bar{\lambda}(s) ds \\
c &= \frac{3}{\left(\int_0^{\tau_1} \bar{\lambda}^2(t) dt\right)^3} \int_0^{\tau_1} \left(\int_0^{\tau_1} \left(\int_0^{\tau_1} \bar{\lambda}^2(t) dt - \int_0^s \bar{\lambda}^2(t) dt \right) \right)^2 \nu^2(t) dt \\
&\quad + \frac{9}{\left(\int_0^{\tau_1} \bar{\lambda}^2(t) dt\right)^3} \int_0^{\tau_1} \left(\int_0^t \rho(v) \nu(v) \bar{\lambda}(v) dv \right)^2 \bar{\lambda}^2(t) dt - 3b^2 \\
L &= \frac{2}{\left(\int_0^{\tau_1} \bar{\lambda}^2(t) dt\right)^2} \int_0^{\tau_1} \left(\int_0^{\tau_1} \bar{\lambda}^2(t) dt - \int_0^s \bar{\lambda}^2(t) dt \right) \nu^2(t) - c
\end{aligned} \tag{A.8}$$

とする。

A.3 定理 2.3.1 と定理 2.3.2 の証明

まず、定理 2.3.1 を再掲し、証明を行う。

$\tau_0 < t$ ならば backward looking caplet を評価するための (2.9) 式に対する effective parameter は

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \frac{2\rho}{\sqrt{\zeta}(3q+2)} \\
\hat{\nu}^2 &= \nu^2 \zeta(2q+1) \\
\hat{\alpha}^2 &= \frac{\alpha}{2q+1} \left(\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_0} \right)^{2q} \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\nu^2}{q+1} - \hat{\nu}^2 \right) \tau_0 \right) \\
\hat{\beta} &= \beta
\end{aligned}$$

である。ただし、

$$\zeta = \frac{3}{4q+3} \left(\frac{1}{2q+1} + \rho^2 \frac{2q}{(3q+2)^2} \right)$$

である。

Proof. (2.9) 式を再掲する。

$$\begin{aligned}
dR_t &= \lambda(t) \sigma_t (R_t + s)^\beta dW_{1,t}^{\tau_1}, \\
d\sigma_t &= \nu \sigma_t dW_{2,t}^{\tau_1},
\end{aligned} \tag{A.9}$$

まず、一般性を失わず、 $s = 0$ とする。また、(A.9) 式より A.2 節の dynamic SABR モデルにおいて、 $\bar{\lambda}(t) = \lambda(t)$ かつ $\nu(t)$ と $\rho(t)$ が定数の場合、つまり、 $\nu(t) \equiv \nu$ 、 $\rho(t) \equiv \rho$ を考える。したがって、

$$\begin{aligned}
dR_t &= \lambda(t) \sigma_t R_t^\beta dW_{1,t} \\
d\sigma_t &= \nu \sigma_t dW_{2,t} \\
dW_{1,t} dW_{2,t} &= \rho dt
\end{aligned} \tag{A.10}$$

の場合を考える。

(A.4) 式に対する effective parameter は、(A.8) 式より、

$$\hat{\alpha} = \Delta e^{\frac{1}{4}\Delta^2 LT}, \quad \hat{\rho} = \frac{b}{\sqrt{c}}, \quad \hat{\nu} = \Delta\sqrt{c} \quad (\text{A.11})$$

である。ただし、

$$\Delta^2 = \frac{v(T)}{T} \quad (\text{A.12})$$

$$b = \frac{2\rho\nu}{v^2(T)} \int_0^T (v(T) - v(s))\lambda(s)ds$$

$$L = \frac{2\nu^2}{v^2(T)} \int_0^T (v(T) - v(s)) ds - c \quad (\text{A.13})$$

$$c = \frac{3\nu^2}{v^3(T)} \int_0^T (v(T) - v(s))^2 ds + \frac{9}{v^3(T)} w^2(s)\lambda^2(s)ds - 3b^2 \quad (\text{A.14})$$

$$v : u \mapsto \int_0^u \lambda^2(s)ds \quad (\text{A.15})$$

$$w : u \mapsto \rho\nu \int_0^u \lambda(s)ds \quad (\text{A.16})$$

とする。これらを用いて (A.10) 式に対する effective parameter を求める。今、

$$\lambda(t) = \alpha \left(\frac{\tau_1 - t}{\tau_1 - \tau_0} \right)^q, \quad t \leq \tau_1 \quad (\text{A.17})$$

であることに注意すると、(A.15) 式は

$$\begin{aligned} v(u) &= \frac{\alpha^2}{(\tau_1 - \tau_0)^{2q}} \int_0^u (\tau_1 - s)^{2q} ds \\ &= \frac{\alpha^2}{(\tau_1 - \tau_0)^{2q}} \left[\frac{-(\tau_1 - s)^{2q+1}}{(2q+1)} \right]_0^u \\ &= \alpha^2 \frac{\tau_1^{2q+1} - (\tau_1 - u)^{2q+1}}{(2q+1)(\tau_1 - \tau_0)^{2q}} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

となり、(A.16) 式は

$$\begin{aligned} w(u) &= \frac{\rho\nu\alpha}{(\tau_1 - \tau_0)^q} \int_0^u (\tau_1 - s)^q ds \\ &= \frac{\rho\nu\alpha}{(\tau_1 - \tau_0)^q} \left[\frac{-(\tau_1 - s)^{q+1}}{q+1} \right]_0^u \\ &= \rho\nu\alpha^2 \frac{\tau_1^{q+1} - (\tau_1 - u)^{q+1}}{(\tau_1 - \tau_0)^q(q+1)} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

となる。特に、 $u = \tau_1$ のとき、

$$v(\tau_1) = \alpha^2 \frac{\tau_1^{2q+1}}{(2q+1)(\tau_1 - \tau_0)^{2q}} \quad (\text{A.20})$$

$$v(\tau_1) - v(s) = \alpha^2 \frac{(\tau_1 - s)^{2q+1}}{(2q+1)(\tau_1 - \tau_0)^{2q}} \quad (\text{A.21})$$

なので、 b と c は、それぞれ

$$\begin{aligned} b &= \frac{2\rho\nu}{v^2(T)} \int_0^T (v(T) - v(s))\phi(s)ds \\ &= \frac{2\rho\nu}{\left(\alpha^2 \frac{\tau_1^{2q+1}}{(2q+1)(\tau_1 - \tau_0)^{2q}}\right)^2} \int_0^{\tau_1} \left(\alpha^2 \frac{(\tau_1 - s)^{2q+1}}{(2q+1)(\tau_1 - \tau_0)^{2q}} \right) \left(\alpha \left(\frac{\tau_1 - s}{\tau_1 - \tau_0} \right)^q \right) ds \\ &= \frac{2\rho\nu(2q+1)(\tau_1 - \tau_0)^q}{\alpha\tau_1^{4q+2}} \int_0^{\tau_1} (\tau_1 - s)^{3q+1} ds \\ &= \frac{2\rho\nu(2q+1)(\tau_1 - \tau_0)^q}{\alpha\tau_1^{4q+2}} \left[-\frac{(\tau_1 - s)^{3q+2}}{(3q+2)} \right]_0^{\tau_1} \\ &= \frac{\rho\nu(4q+2)}{\alpha(3q+2)} \left(\frac{\tau_1 - \tau_0}{\tau_1} \right)^q \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$c = \frac{3\nu^2}{v^3(T)} \int_0^T (v(T) - v(s))^2 ds + \frac{9}{v^3(T)} \int_0^T w^2(s)\phi^2(s)ds - 3b^2 \quad (\text{A.23})$$

となる。また、 Δ^2 と L はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \frac{v(T)}{T} \\ &= \frac{\alpha^2 \frac{\tau_1^{2q+1}}{(2q+1)(\tau_1 - \tau_0)^{2q}}}{\tau_1} \\ &= \alpha^2 \frac{\tau_1^{2q}}{(2q+1)(\tau_1 - \tau_0)^{2q}} \\ &= \frac{\alpha^2}{(2q+1)} \left(\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_0} \right)^{2q} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{2\nu^2}{v^2(T)} \int_0^T (v(T) - v(s))ds - c \\ &= \frac{2\nu^2}{v^2(T)} \int_0^T \alpha^2 \frac{(\tau_1 - s)^{2q+1}}{(2q+1)(\tau_1 - \tau_0)^{2q}} ds - c \\ &= \frac{2\nu^2}{\alpha^4 \frac{\tau_1^{4q+2}}{(2q+1)^2(\tau_1 - \tau_0)^{4q}}} \alpha^2 \frac{1}{(2q+1)(\tau_1 - \tau_0)^{2q}} \left[-\frac{(\tau_1 - s)^{2q+2}}{2q+2} \right]_0^T - c \\ &= \frac{2\nu^2(2q+1)}{\alpha^2(q+1)} \left(\frac{\tau_1 - \tau_0}{\tau_1} \right)^{2q} - c \\ &= \frac{\nu^2}{\Delta^2(q+1)} - c \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

となる。以上より、(A.10)式に対する effective parameter $\hat{\alpha}, \hat{\nu}, \hat{\rho}$ は、それぞれ、

$$\hat{\beta} = \beta \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}^2 &= \Delta e^{\frac{1}{4}\Delta^2\tau_1 L} \\
&= \Delta e^{\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^2}{(2q+1)}\left(\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_0}\right)^{2q}\right)\tau_1\left(\frac{\nu^2}{\Delta^2(q+1)}-c\right)} \\
&= \frac{\alpha}{2q+1}\left(\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_0}\right)^{2q}\exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\nu^2}{q+1}-\hat{\nu}^2\right)\tau_0\right)
\end{aligned} \tag{A.27}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\nu}^2 &= \Delta^2 c \\
&= \frac{\alpha^2}{(2q+1)}\left(\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_0}\right)^{2q}\left(\frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{\tau_1-\tau_0}{\tau_1}\right)^{2q}\frac{3(2q+1)}{(3q+2)^2(4q+3)}((3q+2)^2+\rho^2(4q^2+2q)) \\
&= \nu^2\zeta(2q+1)
\end{aligned} \tag{A.28}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \frac{b}{\sqrt{c}} \\
&= \frac{\frac{\rho\nu(4q+2)}{\alpha(3q+2)}\left(\frac{\tau_1-\tau_0}{\tau_1}\right)^q}{\frac{3\nu^2}{v^3(T)}\int_0^T(v(T)-v(s))^2 ds + \frac{9}{v^3(T)}\int_0^T w^2(s)\phi^2(s) ds - 3b^2} \\
&= \frac{2\rho}{\sqrt{\zeta}(3q+2)}
\end{aligned} \tag{A.29}$$

となる。ただし、

$$\zeta = \frac{3}{4q+3}\left(\frac{1}{2q+1} + \rho^2\frac{2q}{(3q+2)^2}\right)$$

とした。 □

次に、定理 2.3.2 を再掲し、証明を行う。

$\tau_0 \geq t$ ならば、backward looking caplet を評価するための (2.9) 式に対する effective parameter は

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \rho\frac{3\tau^2 + 2q\tau_0^2 + \tau_1^2}{\sqrt{\gamma}(6q+4)}, \\
\hat{\nu}^2 &= \nu^2\gamma\frac{2q+1}{\tau^3\tau_1}, \\
\hat{\alpha}^2 &= \frac{\alpha^2}{2q+1}\frac{\iota}{\tau_1}\exp\left(\frac{1}{2}\theta\tau_1\right) \\
\hat{\beta} &= \beta
\end{aligned} \tag{A.30}$$

である。ただし、 ι, θ, γ は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\iota &= 2q\tau_0 + \tau_1, \\
\theta &= \nu^2\frac{\tau^2 + 2q\tau_0^2 + \tau_1^2}{2\tau_1\iota(q+1)} - \hat{\nu}^2, \\
\gamma &= \iota\frac{2\tau^3 + \tau_1^3 + (4q^2 - 2q)\tau_0^3 + 6q\tau_0^2\tau_1}{(4q+3)(2q+1)} \\
&\quad + 3q\rho^2(\tau_1 - \tau_0)^2\frac{3\tau^2 - \tau_1^2 + 5q\tau_0^2 + 4\tau_0\tau_1}{(4q+3)(3q+2)^2}
\end{aligned} \tag{A.31}$$

Proof. 定理 2.3.1 と同様に示せる。

ただし、

$$v(u) = \begin{cases} \alpha^2 u, & 0 \leq u \leq \tau_0 \\ \frac{\alpha^2}{2q+1} \left(2q\tau_0 + \tau_1 - \frac{(\tau_1-u)^{2q+1}}{(\tau_1-\tau_0)^{2q}} \right), & \tau_0 \leq u \leq \tau_1 \end{cases}$$

$$w(u) = \begin{cases} \rho\nu\alpha u, & 0 \leq u \leq \tau_0 \\ \frac{\rho\nu\alpha}{q+1} \left(2q\tau_0 + \tau_1 - \frac{(\tau_1-u)^{q+1}}{(\tau_1-\tau_0)^{2q}} \right), & \tau_0 \leq u \leq \tau_1 \end{cases}$$

となることに注意する。定理 2.3.1 と同様の計算を行うと

$$\begin{aligned} b &= \frac{2\rho}{v^2(\tau_1)} \int_0^{\tau_1} (v(\tau_1) - v(s))\bar{\phi}(s)ds \\ &= \frac{\nu\rho}{\alpha}(2q+1) \frac{3\tau^2 + 2q\tau_0^2 + \tau_1^2}{2\iota^2(3q+2)} \\ c &= \frac{3\nu^2}{v^3(T)} \int_0^T (v(T) - v(s))^2 ds + \frac{9}{v^3(T)} \int_0^T w^2(s)\lambda^2(s)ds - 3b^2 \\ &= \frac{\nu^2}{\alpha^2} \frac{\gamma(2q+1)^2}{\iota^4} \\ \Delta^2 &= \frac{v(\tau_1)}{\tau_1} = \frac{\alpha^2\iota}{\tau_1(2q+1)} \\ L &= \frac{2\nu^2}{v^2(T)} \int_0^T (v(T) - v(s))ds - c \\ &= \frac{\nu^2}{\Delta^2} \frac{\iota^2 + 2q\tau_0^2 + \tau_1^2}{2\tau_1\iota(q+1)} - c \end{aligned} \tag{A.32}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^2 &= \Delta^2 e^{\frac{1}{2}\Delta^2 G\tau_1} = \frac{\alpha^2\iota}{\tau_1(2q+1)} e^{\frac{1}{2}\Delta^2 L\tau_1} \\ \hat{\nu}^2 &= \Delta^2 c = \frac{\nu^2\gamma(2q+1)}{\tau^3\tau_1} \\ \hat{\rho} &= \frac{b}{\sqrt{c}} = \frac{\rho}{\sqrt{\gamma}} \frac{3\iota^3 + 2q\tau_0^2 + \tau_1^2}{2(3q+2)} \\ \hat{\beta} &= \beta \end{aligned} \tag{A.33}$$

となる。また、 $\theta = \Delta^2 L$ とすればよい。

□

補論 B 3章の命題の証明

B.1 命題 3.3.1 の証明

命題 3.3.1 を再掲する。

関数 G を以下のように定義する。

$$G_t(\beta; T, \alpha) := \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{\alpha I_{t,T}} \mathbf{1}_{\{I_{t,T} - \beta \geq 0\}} \right] \quad (\text{B.1})$$

このとき、(3.10) 式は

$$V_{cpl}^b(t) = \frac{1}{\tau_1 - \tau_0} \left(\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_{t,\tau_0}} G_{\tau_0}(\tilde{k}; \tau_1, 0) \right] - \tilde{K} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_{t,\tau_0}} G_{\tau_0}(\tilde{k}; \tau_1, -1) \right] \right) \quad (\text{B.2})$$

となる。ただし、 $\tilde{k} := \ln \tilde{K}$ とする。

Proof.

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\tau_0} &= \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_{\tau_0,\tau_1}} \left(e^{I_{\tau_0,\tau_1}} - \tilde{K} \right)^+ \right] \\ &= \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_{\tau_0,\tau_1}} \left(e^{I_{\tau_0,\tau_1}} - \tilde{K} \right) \mathbf{1}_{\{e^{I_{\tau_0,\tau_1}} \geq \tilde{K}\}} \right] \end{aligned}$$

ここで、

$$\tilde{k} = \ln \tilde{K}$$

より、

$$\mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_{\tau_0,\tau_1}} \left(e^{I_{\tau_0,\tau_1}} - \tilde{K} \right) \mathbf{1}_{\{e^{I_{\tau_0,\tau_1}} \geq \tilde{K}\}} \right] = \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\{I_{\tau_0,\tau_1} \geq \tilde{k}\}} \right] - \tilde{K} \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_{\tau_0,\tau_1}} \mathbf{1}_{\{I_{\tau_0,\tau_1} \geq \tilde{k}\}} \right] \quad (\text{B.3})$$

となる。関数 G は

$$G_t(\beta; T, \alpha) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{\alpha I_{t,T}} \mathbf{1}_{\{I_{t,T} - \beta \geq 0\}} \right]$$

なので、(B.3) 式は

$$\mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\{I_{\tau_0,\tau_1} \geq \tilde{k}\}} \right] - \tilde{K} \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_{\tau_0,\tau_1}} \mathbf{1}_{\{I_{\tau_0,\tau_1} \geq \tilde{k}\}} \right] = G_{\tau_0}(\tilde{k}; \tau_1, 0) - \tilde{K} G_{\tau_0}(\tilde{k}; \tau_1, -1) \quad (\text{B.4})$$

とかける。以上より、

$$\begin{aligned} V_{cpl}^b(t) &= \frac{1}{\tau_1 - \tau_0} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_{t,\tau_0}} \mathbb{E}_{\tau_0}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_{\tau_0,\tau_1}} \left(e^{I_{\tau_0,\tau_1}} - \tilde{K} \right)^+ \right] \right] \\ &= \frac{1}{\tau_1 - \tau_0} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_{t,\tau_1}} \tilde{V}_{\tau_0} \right] \\ &= \frac{1}{\tau_1 - \tau_0} \left(\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_{t,\tau_0}} G_{\tau_0}(\tilde{k}; \tau_1, 0) \right] - \tilde{K} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-I_{t,\tau_0}} G_{\tau_0}(\tilde{k}; \tau_1, -1) \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

を得る。 □

B.2 命題 3.3.2 の証明

命題 3.3.2 を再掲する。

\tilde{V}_{T_0} をフーリエ・スティルチェス変換し、変換後の関数を $\hat{G}_t(\xi; T, \alpha)$ とすると、

$$\begin{aligned}\hat{G}_t(\xi; T, \alpha) &:= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\beta} \frac{d}{d\beta} G_t(\beta; T, \alpha) d\beta \\ &= \mathbb{E}_t \left[e^{(\alpha+i\xi)I_{t,T}} \right]\end{aligned}\tag{B.6}$$

となる。

Proof.

$$\begin{aligned}\hat{G}_t(\xi; T, \alpha) &:= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\beta} \frac{d}{d\beta} G_t(\beta; T, \alpha) d\beta \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\beta} \frac{d}{d\beta} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{\alpha I_{t,T}} \mathbf{1}_{\{I_{t,T}-\beta \geq 0\}} \right] d\beta \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\beta} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{\alpha I_{t,T}} \frac{d}{d\beta} \mathbf{1}_{\{I_{t,T}-\beta \geq 0\}} \right] d\beta \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\beta} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{\alpha I_{t,T}} \delta(I_{t,T} - \beta) \right] d\beta \\ &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{\alpha I_{t,T}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi\beta} \delta(I_{t,T} - \beta) d\beta \right] \\ &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{\alpha I_{t,T}} e^{i\xi I_{t,T}} \right] \\ &= \mathbb{E}_t \left[e^{(\alpha+i\xi)I_{t,T}} \right]\end{aligned}$$

より題意が示される。

□

補論 C 微分方程式の解法

C.1 4次のルンゲ・クッタ公式

4.1 節で扱った Runge-Kutta 法の解説をする。一般的に利用される 4 次の Runge-Kutta 法とは、以下で知られている。 f を x, y の関数とする。このとき、

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (\text{C.1})$$

となる微分方程式を考える。次に、

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \quad (\text{C.2})$$

とする。ただし、 $x_{n+1} = x_n + h$ とする。この k_1 を使用し、

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (\text{C.3})$$

また、この k_2 を使用し、

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad (\text{C.4})$$

さらに、この k_3 を使用し、

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \quad (\text{C.5})$$

とする。これらを用いて、以下で与えられる式で微分方程式の初期値問題を解く方法を 4 次の Runge-Kutta 法とよぶ。

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (\text{C.6})$$

C.2 3.4 節の微分方程式の解法

この 4 次の Runge-Kutta 法を利用し、(3.40) 式を解いた。(3.40) 式を再掲する。

$$\begin{aligned} & \tilde{A}'(t, s; a, b, c, d) - \kappa(t)\tilde{A}(t, s; a, b, c, d) + g_1(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) \\ & + \frac{1}{2}g_1(t)\tilde{A}^2(t, s; a, b, c, d) + d = 0 \\ & \tilde{B}'(t, s; a, b, c, d) + \tilde{A}(t, s; a, b, c, d) + g_2(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) \\ & - 2\kappa(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) + \frac{1}{2}g_2(t)\tilde{A}^2(t, s; a, b, c, d) = 0 \\ & \tilde{C}'(t, s; a, b, c, d) + g_0(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) + \frac{1}{2}g_0(t)\tilde{A}^2(t, s; a, b, c, d) + df(0, t) = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

ただし、境界条件は

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}(s, s; a, b, c, d) &= a \\
 \tilde{B}(s, s; a, b, c, d) &= b \\
 \tilde{C}(s, s; a, b, c, d) &= c
 \end{aligned}
 \tag{C.8}$$

とする。C.1 節の通り、Runge-Kutta 法は初期値問題を解く方法であるため、初期値問題として解けるよう関数 $\tilde{A}(t, s; a, b, c, d)$, $\tilde{B}(t, s; a, b, c, d)$, $\tilde{C}(t, s; a, b, c, d)$ を以下のように置換した。

$$\begin{aligned}
 \hat{A}(s - t, s; a, b, c, d) &= \tilde{A}(t, s; a, b, c, d) \\
 \hat{B}(s - t, s; a, b, c, d) &= \tilde{B}(t, s; a, b, c, d) \\
 \hat{C}(s - t, s; a, b, c, d) &= \tilde{C}(t, s; a, b, c, d)
 \end{aligned}
 \tag{C.9}$$

すると、初期条件は

$$\begin{aligned}
 \hat{A}(0, s; a, b, c, d) &= a \\
 \hat{B}(0, s; a, b, c, d) &= b \\
 \hat{C}(0, s; a, b, c, d) &= c
 \end{aligned}
 \tag{C.10}$$

となる。上記の置換に合わせ関数 $g_0(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, $f(0, t)$ も同様に以下のように置換した。

$$\begin{aligned}
 \hat{g}_0(s - t) &= g_0(t) \\
 \hat{g}_1(s - t) &= g_1(t) \\
 \hat{g}_2(s - t) &= g_2(t) \\
 \hat{f}(0, s - t) &= f(t)
 \end{aligned}
 \tag{C.11}$$

(C.7) 式をそれぞれ、C.1 節の通り、4 次の Runge–Kutta 法で解く。まず、関数 \hat{A} を解く。

$$\begin{aligned}
Ak_1 &= h \left(-\kappa(s - t_n) \hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \hat{g}_1(s - t_n) \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \hat{g}_1(s - t_n) \hat{A}^2(s - t_n, s; a, b, c, d) + d \right) \\
Ak_2 &= h \left(-\kappa \left(s - \left(t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left(\hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Ak_1}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \hat{g}_1 \left(s - \left(t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left(\hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Bk_1}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \hat{g}_1 \left(s - \left(t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left(\hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Ak_1}{2} \right)^2 + d \right) \\
Ak_3 &= h \left(-\kappa \left(s - \left(t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left(\hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Ak_2}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \hat{g}_1 \left(s - \left(t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left(\hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Bk_2}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \hat{g}_1 \left(s - \left(t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left(\hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Ak_2}{2} \right)^2 + d \right) \\
Ak_4 &= h \left(-\kappa(s - (t_n + h)) (\hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + Ak_3) \right. \\
&\quad \left. + \hat{g}_1(s - (t_n + h)) \left(\hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + Bk_3 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \hat{g}_1(s - (t_n + h)) (\hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + Ak_3)^2 + d \right) \\
\hat{A}(s - t_{n+1}, s; a, b, c, d) &= \hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{1}{6} (Ak_1 + 2Ak_2 + 2Ak_3 + Ak_4)
\end{aligned} \tag{C.12}$$

次に、関数 \hat{B} を解く。

$$\begin{aligned}
Bk_1 &= h \left(\hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \hat{g}_2(s - t_n) \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) \right. \\
&\quad \left. - 2\kappa(s - t_n) \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{1}{2} \hat{g}_2(s - t_n) \hat{A}^2(s - t_n, s; a, b, c, d) \right) \\
Bk_2 &= h \left(\left(\hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Ak_1}{2} \right) \right. \\
&\quad + \hat{g}_2 \left(s - \left(t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left(\hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Bk_1}{2} \right) \\
&\quad - 2\kappa \left(s - \left(t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left(\hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Bk_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \hat{g}_2 \left(s - \left(t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \\
&\quad \times \left. \left(\hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Ak_1}{2} \right)^2 \right) \\
Bk_3 &= h \left(\left(\hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Ak_2}{2} \right) \right. \\
&\quad + \hat{g}_2 \left(s - \left(t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left(\hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Bk_2}{2} \right) \\
&\quad - 2\kappa \left(s - \left(t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left(\hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Bk_2}{2} \right) + \frac{1}{2} \hat{g}_2 \left(s - \left(t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \\
&\quad \times \left. \left(\hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Ak_2}{2} \right)^2 \right) \\
Bk_4 &= h \left((\hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + Ak_3) + \hat{g}_2(s - (t_n + h)) (\hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + Bk_3) \right. \\
&\quad \left. - 2\kappa(s - (t_n + h)) \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + Bk_3 + \frac{1}{2} \hat{g}_2(s - (t_n + h)) (\hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + Ak_3)^2 \right) \\
\hat{B}(s - t_{n+1}, s; a, b, c, d) &= \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{1}{6} (Bk_1 + 2Bk_2 + 2Bk_3 + Bk_4)
\end{aligned} \tag{C.13}$$

最後に関数 \hat{C} を以下の通り解く。

$$\begin{aligned}
Ck_1 &= h \left(\hat{g}_0(s - t_n) \hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{1}{2} \hat{g}_0(s - t_n) \hat{A}^2(s - t_n, s; a, b, c, d) + d \hat{f}(0, s - t) \right) \\
Ck_2 &= h \left(\hat{g}_0 \left(s - \left(t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left(\hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Bk_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \hat{g}_0 \left(s - \left(t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. \times \left(\hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Ak_1}{2} \right)^2 + d \hat{f} \left(0, s - \left(t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \right) \\
Ck_3 &= h \left(\hat{g}_0 \left(s - \left(t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left(\hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Bk_2}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \hat{g}_0 \left(s - \left(t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \left(\hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{Ak_2}{2} \right)^2 + d \hat{f} \left(0, s - \left(t_n + \frac{h}{2} \right) \right) \right) \\
Ck_4 &= h \left(\hat{g}_0(s - (t_n + h)) \left(\hat{B}(s - t_n, s; a, b, c, d) + Bk_3 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \hat{g}_0(s - (t_n + h)) \left(\hat{A}(s - t_n, s; a, b, c, d) + Ak_3 \right)^2 + d \hat{f}(0, s - (t_n + h)) \right) \\
\hat{C}(s - t_{n+1}, s; a, b, c, d) &= \hat{C}(s - t_n, s; a, b, c, d) + \frac{1}{6} (Ck_1 + 2Ck_2 + 2Ck_3 + Ck_4)
\end{aligned} \tag{C.14}$$

ただし、上記はいずれも $t_{n+1} = t_n - h, t_0 = t$ とした。

C.3 命題 3.4.1 の証明

命題 3.4.1 を再掲する。

$g_1(t) = g_2(t) = 0$ 、つまり、

$$\sigma_r(t, x, y)^2 = g_0(t) \tag{C.15}$$

の場合、(3.40) 式は

$$\begin{aligned}
\tilde{A}'(t, s; a, b, c, d) - \kappa(t) \tilde{A}(t, s; a, b, c, d) + d &= 0 \\
\tilde{B}'(t, s; a, b, c, d) + \tilde{A}(t, s; a, b, c, d) - 2\kappa(t) \tilde{B}(t, s; a, b, c, d) &= 0 \\
\tilde{C}'(t, s; a, b, c, d) + g_0(t) \tilde{B}(t, s; a, b, c, d) + \frac{1}{2} g_0(t) \tilde{A}^2(t, s; a, b, c, d) + d \times f(0, t) &= 0
\end{aligned} \tag{C.16}$$

となる。この常微分方程式を解くと、

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(t, s; a, b, c, d) &= d \int_t^s \exp \left(- \int_t^v \kappa(x) dx \right) dv + a \times \exp \left(- \int_u^s \kappa(x) dx \right) \\
\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) &= \int_t^s \tilde{A}(v, s; a, b, c, d) \exp \left(- \int_t^v 2\kappa(x) dx \right) dv + b \times \exp \left(- \int_t^s 2\kappa(x) dx \right) \\
\tilde{C}(t, s; a, b, c, d) &= \int_t^s g_0(v) \tilde{B}(v, s; a, b, c, d) dv \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_t^s g_0(v) \tilde{A}^2(v, s; a, b, c, d) dv + d \int_t^s f(0, v) dv
\end{aligned} \tag{C.17}$$

となる。

Proof. まず、

$$\tilde{A}'(t, s; a, b, c, d) - \kappa(t)\tilde{A}(t, s; a, b, c, d) + d = 0 \quad (\text{C.18})$$

を常数変化法を用いて解く。すなわち、はじめに

$$\tilde{A}'(t, s; a, b, c, d) - \kappa(t)\tilde{A}(t, s; a, b, c, d) = 0 \quad (\text{C.19})$$

を解く。

$$\begin{aligned} \tilde{A}'(t, s; a, b, c, d) - \kappa(t)\tilde{A}(t, s; a, b, c, d) &= 0 \\ \tilde{A}'(t, s; a, b, c, d) &= \kappa(t)\tilde{A}(t, s; a, b, c, d) \\ \frac{\tilde{A}'(t, s; a, b, c, d)}{\tilde{A}(t, s; a, b, c, d)} &= \kappa(t) \\ (\ln(\tilde{A}(t, s; a, b, c, d)))' &= \kappa(t) \\ \ln(\tilde{A}(v, s; a, b, c, d)) - \ln(\tilde{A}(u, s; a, b, c, d)) &= \int_u^v \kappa(t) dt \\ \ln(\tilde{A}(v, s; a, b, c, d)) &= \ln(\tilde{A}(u, s; a, b, c, d)) + \int_u^v \kappa(t) dt \\ \tilde{A}(v, s; a, b, c, d) &= \tilde{A}(u, s; a, b, c, d) \exp\left(\int_u^v \kappa(t) dt\right) \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

となる。改めて、

$$\tilde{A}(t, s; a, b, c, d) = \tilde{A}(u, s; a, b, c, d) \exp\left(\int_u^t \kappa(x) dx\right) \quad (\text{C.21})$$

とする。ここで、

$$\tilde{A}(t, s; a, b, c, d) = D(t) \exp\left(\int_u^t \kappa(x) dx\right) \quad (\text{C.22})$$

とすると、

$$\begin{aligned} D'(t) \exp\left(\int_u^t \kappa(x) dx\right) + D(t)\kappa(t) \exp\left(\int_u^t \kappa(x) dx\right) - \kappa(t)D(t) \exp\left(\int_u^t \kappa(x) dx\right) + d &= 0 \\ D'(t) \exp\left(\int_u^t \kappa(x) dx\right) + d &= 0 \\ D'(t) &= -d \times \exp\left(-\int_u^t \kappa(x) dx\right) \\ D(T) - D(u) &= -d \times \int_u^T \exp\left(-\int_u^t \kappa(x) dx\right) dt \\ D(T) &= D(u) - d \times \int_u^T \exp\left(-\int_u^t \kappa(x) dx\right) dt \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

また、改めて、

$$D(t) = D(u) - d \times \int_u^t \exp\left(-\int_u^v \kappa(x) dx\right) dv \quad (\text{C.24})$$

とする。すると、

$$\tilde{A}(t, s; a, b, c, d) = D(u) \exp\left(\int_u^t \kappa(x) dx\right) - d \times \int_u^t \exp\left(-\int_u^v \kappa(x) dx\right) dv \times \exp\left(\int_u^t \kappa(x) dx\right) \quad (\text{C.25})$$

となる。 $u = t$ のとき、

$$\tilde{A}(t, s; a, b, c, d) = D(t) \quad (\text{C.26})$$

より、

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t, s; a, b, c, d) &= \tilde{A}(u, s; a, b, c, d) \exp\left(\int_u^t \kappa(x) dx\right) \\ &\quad - d \times \int_u^t \exp\left(-\int_u^v \kappa(x) dx\right) dv \times \exp\left(\int_u^t \kappa(x) dx\right) \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

となる。(3.36) 式より

$$\tilde{A}(s, s; a, b, c, d) = a \quad (\text{C.28})$$

であるので、 $t = s$ のとき、(C.27) 式は、

$$\begin{aligned} \tilde{A}(s, s; a, b, c, d) &= \tilde{A}(u, s; a, b, c, d) \exp\left(\int_u^s \kappa(x) dx\right) \\ &\quad - d \times \int_u^s \exp\left(-\int_u^v \kappa(x) dx\right) dv \times \exp\left(\int_u^s \kappa(x) dx\right) \\ a &= \tilde{A}(u, s; a, b, c, d) \exp\left(\int_u^s \kappa(x) dx\right) \\ &\quad - d \times \int_u^s \exp\left(-\int_u^v \kappa(x) dx\right) dv \times \exp\left(\int_u^s \kappa(x) dx\right) \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

よって、

$$\tilde{A}(t, s; a, b, c, d) = d \int_t^s \exp\left(-\int_t^v \kappa(x) dx\right) dv + a \times \exp\left(-\int_u^s \kappa(x) dx\right) \quad (\text{C.30})$$

となる。

同様にして、

$$\tilde{B}'(t, s; a, b, c, d) + \tilde{A}(t, s; a, b, c, d) - 2\kappa(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) = 0 \quad (\text{C.31})$$

を解く。まず、

$$\tilde{B}'(t, s; a, b, c, d) - 2\kappa(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) = 0 \quad (\text{C.32})$$

を解く。

$$\begin{aligned}
\tilde{B}'(t, s; a, b, c, d) - 2\kappa(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) &= 0 \\
\tilde{B}'(t, s; a, b, c, d) &= 2\kappa(t)\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) \\
\frac{\tilde{B}'(t, s; a, b, c, d)}{\tilde{B}(t, s; a, b, c, d)} &= 2\kappa(t) \\
(\ln(\tilde{B}(t, s; a, b, c, d)))' &= 2\kappa(t) \\
\ln(\tilde{B}(v, s; a, b, c, d)) - \ln(\tilde{B}(u, s; a, b, c, d)) &= 2 \int_u^v \kappa(t) dt \\
\ln(\tilde{B}(v, s; a, b, c, d)) &= \ln(\tilde{B}(u, s; a, b, c, d)) + 2 \int_u^v \kappa(t) dt \\
\tilde{B}(v, s; a, b, c, d) &= \tilde{B}(u, s; a, b, c, d) \exp\left(2 \int_u^v \kappa(t) dt\right)
\end{aligned} \tag{C.33}$$

となる。改めて、

$$\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) = \tilde{B}(u, s; a, b, c, d) \exp\left(2 \int_u^t \kappa(x) dx\right) \tag{C.34}$$

とする。ここで、

$$\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) = D(t) \exp\left(2 \int_u^t \kappa(x) dx\right) \tag{C.35}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
D'(t) \exp\left(2 \int_u^t \kappa(x) dx\right) + D(t)\kappa(t) \exp\left(2 \int_u^t \kappa(x) dx\right) - \kappa(t)D(t) \exp\left(2 \int_u^t \kappa(x) dx\right) + d &= 0 \\
D'(t) \exp\left(2 \int_u^t \kappa(x) dx\right) + \tilde{A}(t, s; a, b, c, d) &= 0 \\
D'(t) &= -\tilde{A}(t, s; a, b, c, d) \exp\left(-2 \int_u^t \kappa(x) dx\right) \\
D(T) - D(u) &= - \int_u^T \tilde{A}(t, s; a, b, c, d) \exp\left(-2 \int_u^t \kappa(x) dx\right) dt \\
D(T) &= D(u) - \int_u^T \tilde{A}(t, s; a, b, c, d) \exp\left(-2 \int_u^t \kappa(x) dx\right) dt
\end{aligned} \tag{C.36}$$

また、改めて、

$$D(t) = D(u) - \int_u^t \tilde{A}(v, s; a, b, c, d) \exp\left(-2 \int_u^v \kappa(x) dx\right) dv \tag{C.37}$$

とする。すると、

$$\begin{aligned}
\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) &= D(u) \exp\left(2 \int_u^t \kappa(x) dx\right) - \int_u^t \tilde{A}(v, s; a, b, c, d) \exp\left(-2 \int_u^v \kappa(x) dx\right) dv \\
&\quad \times \exp\left(2 \int_u^t \kappa(x) dx\right)
\end{aligned} \tag{C.38}$$

となる。 $u = t$ のとき、

$$\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) = D(t) \quad (\text{C.39})$$

より、

$$\begin{aligned} \tilde{B}(t, s; a, b, c, d) &= \tilde{B}(u, s; a, b, c, d) \exp\left(2 \int_u^t \kappa(x) dx\right) \\ &\quad - \int_u^t \tilde{A}(v, s; a, b, c, d) \exp\left(-2 \int_u^v \kappa(x) dx\right) dv \times \exp\left(2 \int_u^t \kappa(x) dx\right) \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

となる。(3.36) 式より

$$\tilde{B}(s, s; a, b, c, d) = b \quad (\text{C.41})$$

であるので、 $t = s$ のとき、(C.40) 式は、

$$\begin{aligned} \tilde{B}(s, s; a, b, c, d) &= \tilde{B}(u, s; a, b, c, d) \exp\left(2 \int_u^s \kappa(x) dx\right) \\ &\quad - \int_u^s \tilde{A}(v, s; a, b, c, d) \exp\left(-2 \int_u^v \kappa(x) dx\right) dv \times \exp\left(2 \int_u^s \kappa(x) dx\right) \\ b &= \tilde{B}(u, s; a, b, c, d) \exp\left(2 \int_u^s \kappa(x) dx\right) \\ &\quad - \int_u^s \tilde{A}(v, s; a, b, c, d) \exp\left(-2 \int_u^v \kappa(x) dx\right) dv \times \exp\left(2 \int_u^s \kappa(x) dx\right) \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

よって、 $u = t$ にすると、

$$\tilde{B}(t, s; a, b, c, d) = \int_t^s \tilde{A}(v, s; a, b, c, d) \exp\left(-\int_t^v 2\kappa(x) dx\right) dv + b \times \exp\left(-\int_t^s 2\kappa(x) dx\right) \quad (\text{C.43})$$

となる。

関数 C は上記で求めた関数 A 、関数 B を (C.16) 式に代入して積分したものである。

□

参考文献

- Andersen, L. B. and Piterbarg, V. V. (2010) *Interest Rate Modeling Volume 2: Term Structure Models*, Atlantic Financial Press.
- Brace, A., Gatarek, D., and Musiela, M. (1997) “The Market Model of Interest Rate Dynamics,” *Mathematical Finance*, **7**(2), 127–155.
- Duffie, D., Pan, J., and Singleton, K. (2000) “Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-diffusions,” *Econometrica*, **68**(6), 1343–1376.
- Hagan, P. S., Lesniewski, A. S., and Woodward, D. E. (2018) “Managing Vol Surfaces,” *Wilmott*, **2018**(93), 24–43.
- Hagan, P. S., Kumar, D., Lesniewski, A., and Woodward, D. E. (2002) “Managing Smile Risk,” *Wilmott Magazine*, **1**, 84–108.
- Henrard, M. (2019) “LIBOR Fallback and Quantitative Finance,” *Risks*, **7**(3), 1–15.
- Hull, J. and White, A. (1990) “Pricing Interest-Rate-Derivative Securities,” *Review of Financial Studies*, **3**, 573–92.
- Lyashenko, A. and Mercurio, F. (2019) “Libor replacement: a modelling framework for in-arrears term rates,” *Risk*, **32**(7), 72–77.
- Rebonato, R. (2002) *Modern Pricing of Interest-Rate Derivatives: The Libor Market Model and Beyond*, Princeton Univ Pr.
- Rebonato, R., McKay, K., and White, R. (2011) *The SABR/LIBOR Market Model: Pricing, Calibration and Hedging for Complex Interest-Rate Derivatives*, Wiley.
- Turfus, C. (2022) “Caplet Pricing with Backward-Looking Rates,” *Wilmott*, **2022**(121), 106–109.
- Willems, S. (2021) “SABR smiles for RFR caplets,” *Risk*, **34**(3), 72–77.